



**ОБЩИЙ  
ФИЗИЧЕСКИЙ  
ПРАКТИКУМ  
МЕХАНИКА**

# **ОБЩИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ. МЕХАНИКА**

*Под редакцией А. Н. Матвеева  
и Д. Ф. Киселева*

Допущено Государственным комитетом СССР по народному образованию в качестве учебного пособия для студентов физических специальностей университетов

**ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
1991**

ББК 22.3  
О-28  
УДК 530.10

Рецензенты:

кафедра физики Московского авиационного института,  
профессор Н. П. Калашников

Авторы:

Л. Г. Деденко, Д. Ф. Киселев, В. К. Петерсон, А. И. Слепков

О-28    **Общий физический практикум. Механика/Под ред.**  
**А. Н. Матвеева, Д. Ф. Киселева. — М.: Изд-во МГУ, 1991.—**  
**272 с.: Ил. 81.**  
**ISBN 5—211—01583—5.**

Учебное пособие является первой книгой общего физического практикума и содержит описания лабораторных работ по механике. Первая часть пособия посвящена общим вопросам статистической обработки экспериментальных результатов и теории ошибок и является общей для всех последующих выпусков практикума. Во второй части рассматриваются динамика твердого тела, законы сохранения в механике, силы трения, деформации и напряжения, колебания и волны. Каждая практическая работа содержит краткое теоретическое введение, описание экспериментальной установки и порядок выполнения упражнений.

Для студентов физических специальностей университетов.

О 1604200000(4309000000)—118 98—91  
077(02)—91

ББК 22.3

ISBN 5—211—01583—5

© Л. Г. Деденко, Д. Ф. Киселев,  
В. К. Петерсон, А. И. Слепков, 1991

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Общий физический практикум занимает важное место в общей системе университетской подготовки специалистов-физиков. Будучи неотъемлемой частью курса общей физики, практикум играет главную роль в ознакомлении студентов с экспериментальными основами фундаментальных физических законов и явлений и в привитии им навыков самостоятельной постановки и проведения современного физического эксперимента. Главными задачами практикума для студентов являются:

- научить применять теоретический материал программных курсов к анализу конкретных физических ситуаций; экспериментально изучать основные физические закономерности, оценивать порядки изучаемых величин, определять точность и степень достоверности получаемых результатов;

- ознакомить с основными экспериментальными методами получения из опыта физической информации. Научить измерять важнейшие физические константы и величины, ознакомить с последними достижениями современной физики в точности их определения;

- ознакомить с современными приборами и другой измерительной аппаратурой, с принципами их действия, дать общие сведения об областях их применения, сложности проведения измерений, точности получаемых величин и источниках вероятных ошибок;

- дать практические навыки в обращении с измерительной аппаратурой и экспериментальными установками. Ознакомить с правилами техники безопасности при проведении экспериментальных исследований;

- научить применять современные методы статистической обработки экспериментальных результатов, в том числе с применением ЭВМ, овладеть культурой записи полученной информации, правильным представлением полученных результатов в виде графиков, схем, таблиц;

- ознакомить с основными принципами автоматизации при помощи ЭВМ процессов сбора и переработки физической информации в современном эксперименте.

В соответствии с сформулированными требованиями формируются лабораторные работы и описания к ним. Последние содер-



жат, как правило, три части: краткая теория исследуемого явления со ссылкой на доступные литературные источники; описание экспериментальной установки с изложением требований техники безопасности и описание отдельных упражнений с указанием формы представляемого отчета.

В общем физическом практикуме физического факультета МГУ студенты работают в течение первых четырех семестров, выполняя соответственно лабораторные работы по следующим разделам курса общей физики: «Механика», «Молекулярная физика», «Электричество и магнетизм» и «Оптика». В каждом семестре студент выполняет 12 лабораторных работ, причем 60—70% из них являются обязательными для всех студентов, а остальные распределяются преподавателем по своему усмотрению с учетом пожеланий студента.

Настоящая книга является первым томом в серии «Общий физический практикум» и имеет ряд особенностей. Первая из них заключается в том, что в ней первая часть посвящена краткому изложению общих принципов проведения физических измерений, теории ошибок и статистической оценки достоверности полученных результатов, а также приводятся основные требования к культуре записи и оформления полученной информации в виде графиков, номограмм и таблиц. Эта часть учебного материала является общей для всех разделов общего физического практикума и ее изучение является обязательным для всех студентов.

В отличие от последующих томов настоящей серии в разделе «Механика» для обработки экспериментальных результатов студенты не используют ЭВМ и проводят все расчеты на микрокалькуляторах.

Предлагаемые во второй части лабораторные работы являются результатом работы коллектива преподавателей и сотрудников кафедры общей физики. Однако решающая роль в формировании общей идеологии раздела «Механика» и разработке большей части лабораторных работ принадлежит доценту А. Г. Белянкину, который в течение многих лет, вплоть до своей кончины, являлся руководителем этого раздела. Кроме того, в постановке отдельных работ и составлении описаний к ним в разное время принимали участие следующие сотрудники кафедры: К. Г. Ахмедзянов (27), Т. С. Величина (9), Е. В. Корчагина (21), Е. С. Четверикова (18). Эти работы составили содержание книги «Физический практикум. Механика и молекулярная физика» под редакцией проф. В. И. Ивероновой, вышедшей в свет в 1967 году. Однако с выхода этого учебного пособия большинство лабораторных работ претерпело различного рода модернизации. Изложение их теории приведено в соответствии с действующими программами, поставлен ряд новых лабораторных работ. В последних участвовали А. Г. Белянкин (14—16, 23—24), А. В. Устинова (13, 24), Д. Ф. Киселев, Л. П. Иванов, В. К. Корнев (21, 22). В создании экспериментальных установок принимали участие выпускники физического факультета Т. А. Крамаренко и А. В. Молодцов.

Труд авторов распределился следующим образом: часть I (гл. 1—7) написана доцентом Л. Г. Деденко, часть II — доцентом Д. Ф. Киселевым (гл. 8, 12, 13 введение, 1—3, 21—24, 26, 27), доцентом В. К. Петерсоном (гл. 9, 10 введение, 7, 9, 10, 12—16), ассистентом А. И. Слепковым (гл. 11 введение, 4—6, 17—20). По просьбе авторов гл. 7 (§§ 28, 29, 30) части I написаны доцентом Б. И. Волковым и профессором Ю. П. Пытьевым; описание к лабораторной работе 11 было составлено старшим преподавателем М. В. Семеновым, а к работе 24 — ассистентом Н. А. Сухаревой. Ассистент Л. П. Иванов принимал участие в написании введения к гл. 8.

*А. Н. Матвеев, Д. Ф. Киселев*

# ЧАСТЬ I

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА И ОФОРМЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА (В ЛАБОРАТОРИЯХ ОБЩЕГО ФИЗИЧЕСКОГО ПРАКТИКУМА). КРАТКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ**

---

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ЧАСТИ I**

1. *Долинский Е. Ф.* Обработка результатов измерений. М.: Изд-во Комитета стандартов, 1973.
2. *Пытьев Ю. П.* Методы анализа и интерпретации эксперимента. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
3. *Пытьев Ю. П.* Математические методы анализа эксперимента. М.: Высшая школа, 1989.
4. *Хампель Ф., Ронгетти Э., Рауссеу П., Штаэль В.* Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. М.: Мир, 1989.
5. *Козлов В. И.* Общий физический практикум. Электричество и магнетизм. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
6. *Булкин П. С., Попова И. И.* Общий физический практикум. Молекулярная физика и термодинамика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
7. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Ч. I. М.: Наука, 1982.
8. *Тейлор Э.* Введение в теорию ошибок. М.: Мир, 1985.
9. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1968.
10. *Сквайрс Дж.* Практическая физика. М.: Мир, 1971.
11. *Колмогоров А. Н.* «Проблемы передачи информации». 1969. Т. V, вып. 3. С. 3—7.
12. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
13. *Пытьев Ю. П., Шишмарев И. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
14. *Карташева А. Н.* Достоверность измерений и критерии качества испытаний приборов. М.: Изд-во Комитета стандартов, 1967.
15. *Деденко Л. Г., Керженцев В. В.* Математическая обработка результатов эксперимента в лабораториях общего физического практикума. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Студенты младших курсов университетов начинают работать в лабораториях физического практикума и поэтому должны учиться обрабатывать результаты эксперимента обычно начиная уже с первого семестра. Однако систематические курсы теории вероятностей, математической статистики, измерительных приборов и элементов метрологии, которые составляют основу математической обработки результатов измерений, а также сама математическая теория обработки результатов эксперимента либо читаются на старших курсах, либо, к сожалению, совсем не читаются. Поэтому студенты первых курсов попадают в трудное положение и нуждаются хотя бы в элементарном руководстве, в котором без привлечения строгих доказательств, возможных только в полных курсах, рассматривались бы основные моменты математической обработки результатов эксперимента.

В имеющихся на эту тему пособиях обычно главное внимание уделяется вопросам статистической обработки результатов измерений. Методы исключения и учета систематических погрешностей и в особенности учета погрешностей измерительных приборов, к сожалению, представлены в литературе недостаточно. Привлечь внимание как преподавателей, так и студентов к проблеме оценки систематических погрешностей, которые в конечном счете и определяют достоверность современных экспериментальных данных — одна из задач данного краткого введения. Методы учета случайных погрешностей излагаются в соответствии с математической подготовкой учащихся, поступивших на первый курс.

Студентов первых курсов надо также учить записывать результаты измерений, рисовать графики, пользоваться правилами приближенных вычислений, т. е. учить экономно считать и оформлять отчет о лабораторной работе. Вопросы оформления уже рассматривались в некоторых книгах. Однако практика показывает, что никакие усилия в этом отношении не являются излишними. Широкое использование карманных калькуляторов и электронных вычислительных машин (ЭВМ) существенно облегчает проблему вычислений. Начиная со второго курса университетов студентам уже могут читаться систематические курсы теории вероятностей, математической статистики и математической теории обработки результатов измерений. Поэтому для ориентировки студентов в главе 7, написанной Б. И. Волковым и Ю. П. Пытьевым, приводятся некоторые сведения по современным методам интерпретации результатов экспериментов. Вдумчивые студенты могут использовать результаты этой главы для обработки результатов измерений в лабораториях общего физического практикума.

Первая часть состоит из семи глав. Основные сведения приводятся в первых четырех главах, остальные три главы носят справочный характер. Мы надеемся, что приводимые рекомендации не будут сковывать инициативу преподавателя или студента в отдельных конкретных случаях.

Порядок изучения части I зависит от уровня подготовки студентов и определяется преподавателем. На начальном этапе обучения по указанию преподавателя студенты читают отдельные параграфы и учатся оформлять вводную часть, записывать результаты измерений, рисовать графики, пользоваться необходимыми формулами. На этом этапе обучения не рекомендуется обращать внимание на выводы формул и доказательства.

На следующем этапе возможна более систематическая проработка части I. Студенты, овладевшие элементарными основами математического анализа, должны знать и понимать (в пределах пособия) основные понятия и определения, знать, какие формулы нужно использовать в конкретных случаях, понимать контуры доказательства некоторых формул.

Необходимо иметь в виду также следующее. Работа в лабораториях общего физического практикума дает возможность наблюдать многие физические явления, знакомиться с наиболее важными приборами, овладевать различными методами измерений, учиться «технике» эксперимента. Поэтому вопросы математической обработки важны для задач, которые ориентированы на получение количественных результатов. По указанию преподавателя для задач, главная цель которых — наблюдение физических явлений, качественные исследования, математическая обработка может быть значительно сокращена.

Подготовленные студенты могут пользоваться систематическими курсами теории вероятностей, математической статистики, измерительных приборов и метрологии. Для этих студентов, а также для желающих понять глубже тот или иной вопрос, затронутый в части I, мы приводим следующий примерный список книг к отдельным главам первой части (см. список рекомендованной литературы к части I).

Глава 1, глава 2: см. [3] с. 12—17; 151—159; см. [1] с. 37—47; см. [14] с. 4—44.

Глава 3: см. [1] с. 48—79; см. [10] с. 67—148; с. 228—234; см. [14] с. 45—147: в конкретных случаях рекомендуется смотреть описание и паспорт прибора, а также ГОСТ, указанный на приборе.

Глава 4: см. [10] с. 160—182; [15] с. 92—103.

Глава 5; глава 6: см. [12] с. 157—173; 188—189; 233—236; 355—357; 365—368; см. [13] с. 6—210; см. [3] с. 18—63; см. [5, 6].

Глава 7: см. [2, 3].

При написании части I учтены замечания, сделанные к пособию [15] А. М. Зимельманом, которому автор глубоко благодарен.

*Л. Г. Деденко*



## **ГЛАВА 1**

### **ЭЛЕМЕНТАРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ**

#### **§ 1. ОСНОВНЫЕ ЦЕЛИ ФИЗИЧЕСКОГО ПРАКТИКУМА**

Физика — опытная наука. Работа в лабораториях физического практикума является неотъемлемой частью процесса изучения как законов, так и методов физики. Основные цели, которые нужно поставить перед работающими в лабораториях общего физического практикума, можно определить следующим образом.

1. Во-первых, учащиеся имеют возможность наблюдать основные физические явления. Изучающему физику необходимо самому увидеть, например, броуновское движение частиц, разложение белого света в спектр, познакомиться с явлениями интерференции, дифракции и т. д. Наблюдение явлений помогает развивать важное качество — физическую интуицию.

2. Во-вторых, учащиеся должны научиться работать с основными приборами. Знание устройства прибора, принципа его работы и понимание того, какие результаты можно получить от прибора, — необходимые элементы процесса изучения физики.

3. В-третьих, очень важно научиться различным методам проведения измерений, овладеть техникой эксперимента. Надо уметь подобрать необходимые приборы, собрать установку, проводить измерения с желаемой точностью, учитывать влияние различного рода погрешностей и оценивать точность окончательного результата, делать правильные выводы из эксперимента. Необходимо, чтобы запись результатов измерений и расчетов отражала ход и логику выполняемой работы и была аккуратной и краткой.

4. Наконец, на всех этапах работы безусловно должна соблюдаться техника безопасности.

#### **§ 2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗМЕРЕНИЯХ**

Понятие измерения раскрывает следующее определение.

Измерить какую-либо физическую величину — значит определить посредством эксперимента, сколько раз заключается в ней однородная с ней величина, принятая за единицу меры. Единицы меры устанавливаются системой единиц.

При измерениях различных величин в лабораториях физического практикума сначала приходится устанавливать приборы, т. е. собирать установку. Приборы должны подбираться в

соответствии с желаемой точностью измерений и затем устанавливаться в соответствии с рекомендациями по их нормальной технической эксплуатации. Следует также исключить возможное влияние на нормальную работу установки различных внешних факторов (наводки, тепловое воздействие, вибрации и т. д.; (подробнее см. § 4, 5).

Затем следует выполнять ряд контрольных измерений, чтобы убедиться в том, что установка на самом деле работает в режиме нормальной технической эксплуатации. С этой целью измеряют заранее известные свойства эталонных веществ, амплитуды заданных сигналов и т. д. После этого приступают к выполнению запланированных измерений.

Непосредственно сам процесс измерения может состоять из большого количества различных операций. В лабораториях физического практикума важными моментами в процессе измерений являются наблюдение и отсчет. Задача наблюдения в том, чтобы зафиксировать факт наступления каких-либо определенных событий, которые могут быть самыми разнообразными: иногда требуется совместить две риски, получить устойчивые, неподвижные фигуры Лиссажу на экране электронного осциллографа, заметить момент, когда мениск, образуемый жидкостью в капилляре, становится плоским при изменении давления в капилляре и т. д. После того как ожидаемое событие наступило, следует отсчет — считывание результата измерений со шкалы лимба или цифрового табло прибора; подсчет количества определенных фигур на экране осциллографа, массы эталонного вещества (определение массы гирек), величины эталонного сопротивления, включенного в цепь (в магазине сопротивлений), и т. д. Регистрация отсчета может производиться автоматически (самописцы и т. д.).

### § 3. ВИДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Очевидно, что отсчет по шкале прибора и значение величины, которая измеряется, не одно и то же. Процесс измерения имеет смысл, если между ними существует определенная связь. Наличие такой связи характеризуется уравнением измерения, которое количественно описывает процесс измерения [1]. В общем случае уравнение измерений может быть очень сложным, а задача интерпретации результатов измерений — совсем не простой (см., например [2—4]). На первом этапе работы в общем физическом практикуме можно использовать различные упрощения, аппроксимации, идеализировать реальную ситуацию. В случае сравнительно простых экспериментов уравнения измерений можно разделить на три группы: прямые, косвенные, совместные.

Измерения называются прямыми, если уравнение имеет вид

$$y = Cx, \quad (3.1)$$

где  $x$  — отсчет по измерительному устройству в делениях шкалы, непосредственный отсчет с цифрового табло или количественная характеристика какого-либо свойства эталонного вещества (например, масса гирь);  $C$  — цена деления шкалы, единичного показания цифрового табло, переводной коэффициент от единицы меры заданного свойства эталонного вещества к единице измерения искомой величины;  $y$  — значение измеряемой величины в принятых для нее единицах, т. е. результат прямых измерений.

Измерение длины линейкой или измерение какой-либо величины прибором, шкала которого проградуирована в единицах измеряемой величины, — примеры прямых измерений.

Измерения называются косвенными, если уравнение имеет вид:

$$z = f(x, y, \dots, a, b, \dots), \quad (3.2)$$

где аргументы  $x, y, \dots$  — результаты прямых измерений заданной (т. е. известной) функциональной зависимости  $f$ ;  $a, b, \dots$  — параметры функциональной зависимости  $f$ ;  $z$  — значение измеряемой величины в принятых для нее единицах, т. е. результат косвенных измерений.

Примером косвенных измерений может служить измерение скорости полета пули с помощью баллистического маятника. Можно показать (см. лабораторную работу 9), что масса  $m$  пули и ее скорость  $v$ , масса маятника  $M$ , длина маятника  $l$  и угол  $\alpha$  отклонения маятника от вертикали при попадании в него пули связаны следующей функциональной зависимостью, т. е. уравнением измерений

$$v = \frac{M+m}{m} \sqrt{lg2} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (3.3)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения, параметр зависимости (3.3). Если в результате прямых измерений определить значения  $m, M, l$  и  $\alpha$  и подставить их в (3.3), то расчет даст значение скорости  $v$ , т. е. результат косвенных измерений.

Одновременные измерения двух или нескольких величин называются совместными, если уравнения измерения для этих величин образуют систему линейно независимых уравнений. В случае двух измеряемых величин такие уравнения имеют вид

$$\begin{cases} f_1(\beta, \eta, x_1, y_1, \dots, a_1, b_1, \dots) = 0, \\ f_2(\beta, \eta, x_2, y_2, \dots, a_2, b_2, \dots) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $x_1, y_1, \dots; x_2, y_2, \dots$  — результаты прямых или косвенных измерений;  $a_1, b_1, \dots; a_2, b_2, \dots$  — параметры функциональных зависимостей  $f_1$  и  $f_2$ ;  $\beta$  и  $\eta$  — измеряемые величины.

Примером совместных измерений может служить одновременное измерение параметров некоторой прямой: тангенса угла наклона и значения ординаты при нулевом значении абсциссы (см. § 9) по данным измерений координат этой прямой.

Если число уравнений превышает число неизвестных (что бывает, если проделано много опытов), то получается система так называемых условных уравнений, которую в некоторых случаях можно решать методом наименьших квадратов (см. § 9).

2. Измерения, при которых число опытов и соответственно число уравнений измерения равны числу измеряемых величин, называют однократными. Если число опытов и соответственно число уравнений измерения превышает число измеряемых величин, то такие измерения называют многократными. Измерения проводятся многократно с целью уменьшить случайную погрешность измерений (см. § 2).

3. С точки зрения цели можно выделить три класса измерений.

1). В случае эталонных измерений результат измерения должен иметь максимально возможную точность при существующем уровне техники. Измерения физических констант (скорости света, заряда электрона и т. д.) — примеры эталонных измерений.

2). В контрольно-поверочных измерениях определяется погрешность средств измерений с помощью эталонных приборов (т. е. приборов с гарантированной малой погрешностью). Такие измерения выполняются в поверочных или контрольно-измерительных лабораториях. Цель таких измерений — гарантировать регламентированную погрешность средств измерений (приборов): например, если измеренная погрешность превысит допустимые пределы, то соответствующий прибор признается негодным.

3). Техническими называются измерения, которые проводятся по заранее разработанной методике, с помощью приборов, погрешности которых изучены и регламентированы. Условия проведения измерений и их порядок также регламентируются, чтобы гарантировать заданную точность результата измерений. Все рекомендации по проведению измерений вырабатываются предварительно на этапе анализа методики.

В лабораториях физического практикума необходимо проверять, может ли точность используемых приборов обеспечить желаемую точность результата.

4). Измерения называются абсолютными, если в уравнение входят только величины, единицы измерения которых приняты за основные и которые измеряются непосредственно с помощью приборов, являющихся некоторой копией эталонов. Абсолютные включают измерения, основанные на определении величин. Можно указать следующие примеры абсолютных измерений:

1) определение ускорения свободного падения  $g$  (см. лабораторную работу 3) с помощью маятника

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2},$$

где  $T$  — период колебаний и  $l$  — приведенная длина физического

маятника; величины  $T$  и  $l$  измеряются непосредственно и единицы их измерения приняты за основные;

2) определение разности потенциалов  $\Delta U$  абсолютным электрометром (см. [2]);

$$\Delta U = \frac{4d}{D} \sqrt{2mg},$$

где  $D$  — диаметр пластины, а  $d$  — расстояние между пластинами конденсатора,  $m$  — масса гирь (на рычажных весах), которая обуславливает силу тяжести, уравновешивающую силу притяжения заряженных пластин; все величины:  $d$ ,  $D$ ,  $m$  измеряются непосредственно, единицы их измерения входят в число основных;

3) измерение плотности тела  $\rho$ , которая по определению равна

$$\rho = \frac{m}{V},$$

где  $m$  — масса, а  $V$  — объем тела, которые измеряются непосредственно. Это измерение основано на определении физической величины  $\rho$ .

Относительными называются измерения, при которых измеряется физическая величина, имеющая одну размерность, а результат непосредственных измерений имеет другую.

Примерами относительных измерений служат измерения массы на пружинных весах; разности потенциалов — вольтметрами; силы тока — амперметрами и т. д. В этих примерах измеряется длина при деформации пружины, сдвиг частей прибора друг относительно друга и т. д., а делается вывод о значении массы, напряжения, силе тока и т. д. В случае относительных измерений используются приборы, которые предварительно калибруются с помощью эталона единицы измерения соответствующей величины. Таким образом, чтобы были возможны относительные измерения, необходимо создать эталоны единиц и с помощью этих эталонов прокалибровать приборы (действие последних должно зависеть от измеряемой величины). Таким образом, в этом случае измеряется не сама физическая величина, а результат ее воздействия на прибор: величины деформации, сдвиг частей прибора друг относительно друга и т. д. Поэтому предварительная калибровка абсолютно необходима.



### § 4. ВИДЫ ПОГРЕШНОСТИ

На результат измерения могут оказывать влияние различные факторы. Это влияние проявляется как погрешность, которая накладывается на значение измеряемой величины так, что результат измерения в простейших случаях представляет из себя сумму истинного значения измеряемой величины и погрешности\*

$$x = \mu + \Delta, \quad (4.1)$$

где  $x$  — результат измерения,  $\mu$  — истинное значение,  $\Delta$  — погрешность. В общем случае связь между истинным значением и измеряемой величиной может быть гораздо более сложной (см. [2—4]). Определим погрешность  $\Delta$  как разность между результатом измерения  $x$  и истинным значением измеряемой величины  $\mu$ :

$$\Delta = x - \mu. \quad (4.2)$$

С понятием погрешности тесно связано понятие точности измерений: чем меньше погрешность, тем выше точность. Удобно характеризовать погрешность относительной величиной

$$E = \frac{\Delta}{\mu}. \quad (4.3)$$

Все погрешности принято делить на две большие группы: систематические и случайные.

Систематической называется погрешность  $\Delta_c$ , которая остается постоянной на протяжении одной серии измерений.

Когда изучается какое-либо явление, то обязательно приходится выделять главные факторы и опускать второстепенные, так как иначе из-за большой сложности не удалось бы разобраться в основном явлении. Например, во многих задачах физического практикума приходится пренебрегать силами трения, массой блоков, упругостью и массой нитей и т. д. Пренебрежение какими-либо явлениями, различные упрощения, а также факторы, о существовании которых экспериментатор просто не знает, приводят к систематическим погрешностям, которые необходимо учи-

---

\* Наряду с термином «погрешность» в литературе используется также слово «ошибка» в значении именно «погрешность», а не как какое-то ошибочное действие.

тивать, чтобы сделать правильные выводы. Правильно учесть систематические погрешности — значит понять, что именно измеряется, т. е. какое отношение имеет результат измерения к величине, которую надо измерить. Важно уметь выделить изучаемое явление на фоне побочных. В этом состоит главное искусство физика-экспериментатора. Систематическая погрешность либо завышает, либо занижает значение измеряемой величины. Увеличением числа измерений нельзя исключить систематическую погрешность. Оценить величину систематической погрешности и ввести необходимые поправки совсем не просто. Для этого приходится делать дополнительные измерения (например, измерять силы трения, массы нитей, блоков и т. д.), рассматривать сложные системы уравнений, в которых учитываются все факторы и т. д.

Случайной называется погрешность  $\Delta$ , которая изменяется от одного измерения к другому непредсказуемым образом и в равной степени может быть как положительной, так и отрицательной.

Случайная погрешность возникает как результат совместного влияния различных случайных факторов. Если измерение выполнено один раз, то о значении случайной погрешности, как правило, ничего не известно. Если какая-либо физическая величина измеряется многократно в одинаковых физических условиях, то можно путем статистической обработки результатов измерений оценить величину случайной погрешности. Для оценки случайных погрешностей используется аппарат теории вероятностей и математической статистики (см. гл. 5—8). Существенным для выводов, которые следуют из эксперимента в этом случае, является понятие статистики событий, или числа измерений. Чем больше статистика, тем точнее и надежнее выводы. Статистика событий для разных экспериментов может колебаться от нескольких единиц в год (эксперименты с нейтрино, космическими лучами и т. д.) до  $10^9$  событий и больше за небольшой отрезок времени (эксперименты на ускорителях, информация со спутников и т. д.). При больших объемах измерений возникают значительные трудности с обработкой результатов эксперимента. Иногда по этой причине выводы из эксперимента делаются спустя несколько лет после его завершения. Чтобы избежать этих трудностей, современные эксперименты реализуются в режиме, получившем название «на линии связи с ЭВМ». Сигналы, отражающие показания измерительных приборов, по линиям связи поступают непосредственно в электронную вычислительную машину (ЭВМ), которая как проводит всю обработку и анализ результатов по заранее разработанной программе, так и управляет ходом эксперимента.

Увеличивая число измерений, можно практически исключить случайные погрешности. Например, пусть разброс случайных погрешностей отдельных измерений  $x$  относительно математического ожидания, (которое по определению равно нулю) характеризуется стандартным отклонением  $\sigma$ . Разброс же случайных погрешностей  $\Delta$  для выборочного среднего  $\bar{x}$ , определенного по выборке объема  $n$ , характеризуется стандартным отклонением  $\sigma/\sqrt{n}$  (см. гл. 5, 6).

Таким образом, при большом числе измерений  $n$  случайная погрешность будет невелика.

Отметим, что случайная погрешность имеет «центр» распределения: математическое ожидание, равное нулю. Произвольная случайная величина такого «центра» может и не иметь: математическое ожидание может и не существовать. Случайные погрешности надо сравнивать с систематическими, так как иначе может оказаться, что повышение точности измерений при увеличении статистики будет иллюзорным из-за систематических погрешностей. Окончательная погрешность результата, т. е. погрешность, которая остается после введения всех поправок, как правило, и определяется таким минимальным значением систематической погрешности, которую еще способен контролировать экспериментатор, располагая заданным комплексом средств измерения.

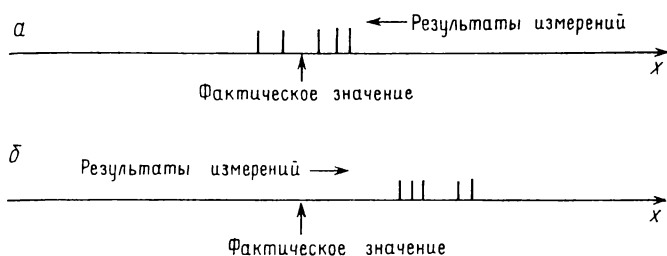


Рис. 1. Искажения измеряемой величины случайными (а) и систематической (б) погрешностями

На рис. 1, а на числовой оси приведены в виде черточек результаты пяти последовательных измерений и фактическое значение измеряемой величины, когда имеются только случайные погрешности, а на рис. 1, б — результаты измерений в случае, когда имеются и систематическая и случайные погрешности.

В заключение сделаем следующее замечание. Все вышесказанное относилось к величинам, которые имеют вполне определенное, фиксированное значение (например, момент инерции тела, толщина стальной пластинки и т. д.). Однако эти же понятия можно применять и для параметров статистических величин (например, средней скорости молекул газа, среднего числа броуновских частиц в поле зрения микроскопа и т. д.), если под ошибкой  $\Delta$  в этом случае понимать разность измеренного значения параметра и его фактического значения.

## § 5. СОСТАВЛЯЮЩИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

На погрешность измерений могут влиять разные факторы (источники погрешности). Имея в виду различные факторы (источники), различают следующие составляющие погрешности измерений:

- 1) погрешность прибора  $\Delta_{\text{п}}$ ;

- 2) погрешность округления  $\Delta_o$ ;
- 3) методическая погрешность  $\Delta_m$ ;
- 4) промахи  $\Delta_{\text{п}}$
- 5) погрешность вычислений  $\Delta_v$ .

Погрешность измерений определяется суммой всех этих составляющих:

$$\Delta = \Delta_{\text{п}} + \Delta_o + \Delta_m + \Delta_{\text{п}} + \Delta_v \quad (5.1)$$

Показания любого прибора, даже самого точного и совершенного, всегда отличаются от фактического значения измеряемой величины. Это отличие характеризуется погрешностью прибора, которая указывается в паспорте, прилагаемом к прибору. Погрешность прибора в свою очередь может содержать случайную и систематическую составляющие. Причины возникновения этой погрешности — несовершенство реальных материалов, невозможность полного устранения вредных помех (например, трения), дефекты сборки и т. д.

При считывании со шкалы прибора результат измерения всегда выражается конечным числом значащих цифр, т. е. всегда имеет погрешность округления.

Существуют различные методические рекомендации по измерению одной и той же физической величины: сложные и более простые. Погрешность результата измерений также зависит от методики их проведения. Каждой методике можно сопоставить некоторую идеализированную модель измерения. Отличия этой модели от реальной процедуры измерений и приводят к методической погрешности. Например, в лабораторной работе 5 момент инерции простейших тел определяется как разность моментов инерции тела с платформой и пустой платформы. Такая методика измерений даже в случае довольно точных измерений отдельных членов разности приводит к большой методической погрешности результата.

В случае резких нарушений условий, при которых должны проводиться измерения, могут появиться промахи, т. е. большие искажения измеряемой величины. Например, невнимательность экспериментатора (увидел одно число, а записал другое; сделал ошибку, когда переписывал результаты и т. д.), резкие сотрясения установки, наводки при коротком замыкании цепи какой-нибудь соседней установки и др. приводят к промахам.

Наконец, в процессе математической обработки результатов измерений, когда вычисления ведутся с конечным числом значащих цифр, могут появиться дополнительные погрешности, связанные с такими вычислениями.

## § 6. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ УЧЕТА ПОГРЕШНОСТЕЙ

В условиях работы в лабораториях физического практикума необходимо учитывать случайные и систематические погрешности.

1. Случайные погрешности можно учитывать одним из следующих способов:

- 1) указать функцию плотности (см. гл. 5);
- 2) в случае, когда систематические погрешности пренебрежимо малы, указать интервал, в котором с установленной вероятностью находится случайная погрешность  $\Delta$  (см. гл. 6);
- 3) указать оценку стандартного отклонения (выборочное стандартное отклонение, см. гл. 7).

Функцию плотности  $f(\Delta)$  удастся указать лишь в немногих случаях, когда она известна.

Если систематические погрешности заметно меньше случайных, то иногда можно в соответствии со сказанным в § 27 определить интервал, в котором может находиться случайная погрешность  $\Delta$ .

В остальных случаях можно вычислить только выборочное стандартное отклонение (см. § 25).

2. Систематические погрешности, как было сказано в § 4, искажают результат измерения в какую-либо одну сторону: завышают его или занижают. Например, при измерении толщины пластины микрометром при высоких или низких температурах может возникать систематическая погрешность из-за различного теплового расширения материалов пластинки и микрометра. Учесть эту погрешность можно, если знать тепловые характеристики материалов и измерить температуру, при которой проводились измерения. При измерении времени возникает систематическая погрешность, если секундомер «спешит» или «отстает». Эту погрешность можно учесть, если проверить ход секундомера по более точным часам. В практике эксперимента очень важным является обнаружение и исключение систематических погрешностей.

Дать общий рецепт исключения систематических погрешностей нельзя, но можно указать некоторые методы, которые могут быть полезны. Систематические погрешности по характеру их проявления могут быть 1) постоянными или 2) переменными (на длительных этапах времени). В последнем случае учет систематических погрешностей особенно затруднителен. Из общих методов исключения систематических погрешностей можно указать следующие:

1) изучение составляющих погрешностей и внесение необходимых поправок, которые определяются в результате проверки приборов по эталонным;

2) устранение возможных дополнительных источников погрешностей, что достигается, в частности, правильной установкой приборов, исключающей их взаимные влияния и возможный параллакс, правильным определением начала отсчета, а также определением времени наступления равновесного или стационарного состояния.

Из множества специальных методов устранения систематических погрешностей укажем на следующие:

- 1) метод двойного измерения и 2) метод компенсации.

Метод двойного измерения применяется для устранения погрешности, возникающей при взвешивании из-за неравенства плеч весов, при измерении мостовым методом сопротивлений, емкостей и т. д. Этот метод состоит в том, что проводятся два измерения,



при которых левая и правая части установки последовательно играют одну и ту же роль.

Метод компенсации состоит в том, что измерения проводятся два раза таким образом, чтобы погрешность вошла в результаты измерений один раз с одним знаком, а другой раз — с другим. Этот метод должен применяться, например, при работах с термopами для исключения паразитных термотоков (см. задачи физического практикума [6]).

Очевидно, что для исключения систематических погрешностей, как правило, нужно проводить дополнительные измерения и вычисления.

Можно заметить, однако, что полностью исключить систематические погрешности нельзя, так как эталонные приборы тоже обладают погрешностью и любое рассмотрение явления не является абсолютно строгим. Поэтому оставшиеся систематические погрешности необходимо учитывать при обработке результатов эксперимента.

Систематические погрешности можно учитывать одним из следующих способов:

1) если известно значение систематической погрешности  $\Delta_c = a$ , то ее значение с обратным знаком  $-a$  называется поправкой. Сумма результата измерений  $x$  и поправки определяет более точное значение измеряемой величины:

$$\mu = x - a; \quad (6.1)$$

2) указать функцию плотности;

3) указать интервал, в котором с установленной вероятностью находится систематическая погрешность  $\Delta_c$ ;

4) указать стандартное отклонение  $\sigma_c$ ;

Последние три способа используются при рандомизации систематической погрешности. Сущность рандомизации состоит в следующем. Пусть, например, систематическая погрешность прибора изменяется от одного прибора к другому. Всю совокупность приборов данного вида и класса в этом случае можно характеризовать функцией плотности, стандартным отклонением или интервалом, в котором с установленной вероятностью находится систематическая погрешность  $\Delta_c$ . Таким образом, вместо того, чтобы указывать систематическую погрешность для каждого прибора, она задается одним из перечисленных выше способов для всей совокупности приборов данного вида. Поэтому, когда работают с каким-то определенным прибором, то в силу отсутствия информации о погрешности данного конкретного прибора используют распределение погрешностей для всей совокупности приборов, т. е. по существу учитывают систематическую погрешность как случайную. Однако систематическая погрешность радикально отличается от случайной: никакими многократными измерениями ее нельзя уменьшить, как это происходит со случайной погрешностью. В случае округления обычно тоже неизвестна (или просто теряется) информация о величине и знаке погрешности округления. Поэтому

ее тоже учитывают как случайную. Аналогично и в любых других случаях, когда отсутствует точная информация о знаке и величине систематической погрешности  $\Delta_c$ , а известно лишь, как часто она может принимать то или иное конкретное значение в подобных ситуациях, и используются последние три способа.

3. В случае, когда имеются и случайные и систематические погрешности, их можно учитывать одним из следующих способов:

1) указать интервал, в котором с установленной вероятностью находится суммарная погрешность;

2) указать интервал, в котором с установленной вероятностью находится систематическая погрешность; указать оценку стандартного отклонения случайной погрешности;

3) указать функции плотности для систематической и случайной погрешностей;

4) указать стандартное отклонение для систематической погрешности и оценку стандартного отклонения для случайной погрешности.

*Замечание 1.* Если анализ систематических погрешностей не проводился, то это необходимо отметить в выводах в отчете о проведенном эксперименте.

*Замечание 2.* В случае ответственных измерений следует учитывать погрешности в соответствии с [2—4].

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

## § 7. ПРЯМЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

После окончания измерений нужно выполнить необходимые расчеты, проанализировать результаты эксперимента и сделать правильные выводы.

В случае прямых многократных измерений (см. § 3) результаты считываются со шкалы, лимба или цифрового табло прибора. За оценку значения измеряемой величины  $\mu$  обычно принимается выборочное среднее этих результатов \* (см. § 25), который обозначается как

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (7.1)$$

где  $x_i$  — результат  $i$ -го измерения;  $n$  — полное число измерений. Так как с течением времени результаты  $x_i$  отдельных измерений могут изменяться, то следует указать интервал времени, в течение которого проводились измерения.

Один из ответственных этапов математической обработки результатов эксперимента — вычисление возможных погрешностей. Оптимальными характеристиками как мера разброса значений  $\bar{x}$  обладает оценка выборочного стандартного отклонения среднего (см. § 25):

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (7.2)$$

где  $\bar{x}$  — среднее, определяемое формулой (7.1).

Далее, используя информацию о приборе (паспорт, класс точности, результаты поверки, ГОСТ и т. д.), определяют погрешность прибора  $\Delta_{\text{п}}$ . Эта погрешность может быть либо предельной и характеризоваться величиной  $\Delta^{**}_{\text{макс}}$ , либо определяться как-нибудь иначе (см. § 6 и [1]), например, как стандартное отклонение  $\sigma_{\text{п}}$ .

---

\* Для однократных измерений (см. § 3) за оценку  $\mu$  принимают результат единичного измерения  $x$ .

\*\*  $\Delta_{\text{макс}}$  — максимальное значение погрешности в случае прямоугольного распределения.

Стандартное отклонение погрешности округления следует вычислять, используя формулу (5.3) (см. § 5.1)

$$\sigma_0 = \frac{\omega}{\sqrt{12}}, \quad (7.3)$$

где  $\omega$  — цена деления прибора (или та удвоенная доля деления, до которой производится округление. Таким образом, систематическую погрешность округления, так же как и погрешность прибора, учитывают как случайную, используя метод рандомизации (см. § 6). Очевидно, что в этом случае никаким увеличением числа измерений нельзя уменьшить значение этой погрешности. В некоторых случаях (например, при измерении длины микрометром, штангенциркулем) погрешность округления может входить в предельную. Однако и в этих случаях погрешность округления можно учитывать отдельно, если вместо предельной погрешности использовать согласно § 6 стандартное отклонение  $\sigma_n$  как характеристики погрешности прибора.

В некоторых случаях необходимо учитывать возможные субъективные погрешности. Например, при измерении промежутков времени с помощью секундомера возникает погрешность, характеризующая субъективную реакцию экспериментатора, его способность вовремя пустить и остановить секундомер. В принципе эта погрешность составляет часть методической и, может быть, случайной, и тогда она учитывается, как и все другие случайные составляющие погрешности измерений при многократных измерениях значением  $s\%$ . Однако она может быть и систематической, и тогда ее необходимо учитывать особо, например методом рандомизации. Опыты показали, что оценка стандартного отклонения этой субъективной погрешности равна

$$\sigma_{\text{суб}} \cong 0,3 \text{ с.} \quad (7.4)$$

Наконец, необходимо оценить различные систематические погрешности, возникающие из-за идеализации условий опыта (пренебрежение силами трения, влиянием наводок, подсветкой фотоэлемента и т. д.). Для успешного выполнения данного этапа лабораторной работы нужно очень внимательно анализировать условия, при которых проводился эксперимент, делать дополнительные измерения и расчеты. В результате такого тщательного анализа определяются как поправки  $a_i$  (см. § 6), так и оценки стандартных отклонений для остающихся методических систематических погрешностей  $\sigma_m$ . В соответствии с § 6 поправки  $a_i$  прибавляют к оценке измеряемой величины  $\mu$ :

$$\mu \cong \bar{x} + \sum_i a_i. \quad (7.5)$$

Остающиеся систематические погрешности учитывают методом рандомизации.

Чтобы последующие вычисления и анализ были проще, следует пренебречь всеми малыми погрешностями, что, конечно, возможно только после того, как все погрешности уже определены. Можно условиться называть малыми такие погрешности, стандартные отклонения которых не превышают 30% от максимального значения:

$$\sigma_{\text{мал}} \leq 0,3\sigma_{\text{макс}}. \quad (7.6)$$

Для проверки неравенства (7.6) в случае, когда одна из погрешностей задается как предельная  $\Delta_{\text{макс}}$ , приближенно можно оценить соответствующее стандартное отклонение следующим образом\*:

$$\sigma_{\text{пр}} \approx \frac{\Delta_{\text{макс}}}{\sqrt{12}}. \quad (7.7)$$

Таким образом, после вычисления стандартных отклонений среднего (или их оценок) для всех составляющих погрешности выбирают максимальное и пренебрегают в последующем анализе всеми составляющими погрешности, стандартные отклонения которых удовлетворяют неравенству (7.6). Оставшиеся составляющие погрешности учитывают одним из способов, рассмотренных в § 6, причем возможны три следующих случая.

1). Если осталась только случайная погрешность, то, когда это возможно (см. § 27), определяется интервал, в котором она может находиться с заданной вероятностью, либо просто ограничиваются указанием выборочного стандартного отклонения среднего  $s_{\bar{x}}$  и числа измерений  $n$ . Очевидно, что случайную погрешность можно уменьшить, если увеличить число измерений  $n$  и улучшить условия, при которых выполняется эксперимент.

2. Если остались только систематические составляющие погрешности, то их можно учитывать методом рандомизации (см. § 6). В случае, когда известны стандартные отклонения, по формуле (7.8) находят стандартное отклонение  $\sigma_{\Sigma}$  для суммарной погрешности  $\Delta_{\Sigma}$

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_o^2 + \sigma_m^2 + \sigma_{\text{суб}}^2 + \dots}. \quad (7.8)$$

Далее либо вычисляют интервал, в котором с установленной вероятностью может находиться суммарная систематическая погрешность (когда известен закон распределения этой погрешности или используется неравенство Чебышева (см. § 22)), либо ограничиваются указанием стандартного отклонения  $\sigma_{\Sigma}$  для этой погрешности.

Если одна из оставшихся систематических погрешностей задается как предельная, то в случае, когда известен закон распределения этой погрешности и поэтому можно определить стандартное

---

\* В предположении, что погрешность распределена по прямоугольному закону (см. гл. 5).



отклонение, ее учитывают, как и все другие погрешности в формуле (7.8). В условиях физического практикума допустимо приближение, когда предельную погрешность можно учитывать, как и все остальные составляющие систематической погрешности, используя формулу (7.7) для оценки стандартного отклонения этой погрешности. В ответственных случаях предельная погрешность учитывается отдельно, т. е. указывается значение этой предельной погрешности и стандартное отклонение для остальных составляющих систематической погрешности  $\sigma_z$ .

Очевидно, что уменьшить систематические погрешности можно, если только усовершенствовать методику измерений и использовать более точные приборы. Никакое увеличение числа измерений не может привести к уменьшению систематической погрешности.

3). Если и случайная и систематические погрешности сравнимы по величине, то согласно § 6 либо находится интервал, в котором с установленной вероятностью может находиться суммарная погрешность, либо эти погрешности учитываются порознь. Следует заметить, что в условиях работы в лабораториях физического практикума сравнительно редко удастся вычислить интервал для суммарной погрешности, и поэтому, как правило, приходится учитывать случайную и систематические погрешности отдельно, как это было рассмотрено выше в п.п. 1) и 2) (см. также § 6).

## § 8. КОСВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

В случае косвенных измерений искомая величина вычисляется на основании уравнения измерения (см. формулу (3.2) § 3).

В идеализированном случае для целей физического эксперимента представляет интерес значение функции  $f$ , вычисленное для истинных значений аргументов, т. е. величина

$$\mu_z = f(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots), \quad (8.1)$$

где  $\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots$  — истинные значения аргументов  $x_1, x_2, \dots$ ;  $\mu_z$  — искомая величина. Константы и параметры функциональной зависимости в (8.1) для краткости опущены. Уравнение (8.1) определяет искомую величину  $\mu_z$ . Однако на практике обычно известны не истинные значения  $\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots$ , а выборочные средние  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ , которые отражают вклад различных погрешностей. Обозначим результат вычисления функции (8.1) через  $\bar{z}$ , если в качестве аргументов использованы величины  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ . Очевидно, что  $\bar{z}$  будет также случайной величиной. Поэтому, как и в случае прямых измерений, можно попытаться определить, с какой вероятностью величина  $\mu_z$  может находиться в заданном интервале или каковы характеристики ее систематической и случайной погрешностей (см. § 6). Ввиду сложности задачи ограничимся лишь ее приближенным решением, которое будет тем точнее, чем меньше погрешности выборочных средних  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ .

Ради простоты изложения рассмотрим подробно функцию только одной переменной, делая для случая многих независимых пе-

ременных необходимые замечания. Математические преобразования в случае функции многих переменных совершенно аналогичны проводимым преобразованиям для случая одного переменного.

Предположим, что функцию

$$\bar{z} = f(\bar{x}) \quad (8.2)$$

можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $\mu_x$ , где  $\mu_x$  — истинное значение величины  $x$ . Разложим функцию  $f(\bar{x})$  в ряд Тейлора\*, ограничиваясь линейным членом разложения

$$\bar{z} = f(\mu_x) + \left. \frac{df}{d\bar{x}} \right|_{\mu_x} (\bar{x} - \mu_x) + r_2, \quad (8.3)$$

где выражение  $\left. \frac{df}{d\bar{x}} \right|_{\mu_x}$  означает значение производной функции  $f$  в точке  $\mu_x$ . Запишем для разложения (8.3) остаточный член  $r_2$  в форме Лагранжа

$$r_2 = \left. \frac{d^2 f}{d\bar{x}^2} \right|_C \cdot \frac{(\bar{x} - \mu_x)^2}{2!}, \quad (8.4)$$

где выражение  $\left. \frac{d^2 f}{d\bar{x}^2} \right|_C$  означает значение второй производной функции  $f$  в точке  $C$  и точка  $C$  лежит между  $\mu_x$  и  $\bar{x}$ .

Можно поставить вопрос, при каких условиях можно пользоваться линейным разложением (8.3)? Ответ, очевидно, зависит от требований, которые мы предъявляем к точности вычисления оценки  $\mu_z$ . В условиях физического практикума будем считать, что можно пользоваться разложением (8.3), если для всех  $\bar{x}$  выполняется следующее условие:

$$\frac{|r_2|}{\left| \left. \frac{df}{d\bar{x}} \right|_{\mu_x} (\bar{x} - \mu_x) \right|} \leq 0,1, \quad (8.5)$$

т. е. остаточный член  $r_2$  должен составлять не более 10% от линейного члена. Условие (8.5) определяет интервал  $\Delta x = |\bar{x} - \mu_x|$ , для которого справедливо разложение (8.3)

$$\Delta x = |\bar{x} - \mu_x| \leq \frac{0,2 \left| \left. \frac{df}{d\bar{x}} \right|_{\mu_x} \right|}{\left| \left. \frac{d^2 f}{d\bar{x}^2} \right|_C \right|}, \quad (8.6)$$

причем производные считаются отличными от нуля и бесконечности.

Поскольку разность  $\bar{x} - \mu_x$  является случайной величиной, то непосредственно из (8.5) нельзя сделать вывода о возможности разложения (8.3). Однако если бы удалось определить верхнюю границу  $\Delta x_{\text{макс}}$  для этой разности, тогда в случае справедливости

\* Относительно возможности разложения функции в ряд Тейлора см. [7].

неравенства (8.5), в которое вместо  $\Delta x$  надо подставить эту верхнюю границу, следовала бы возможность разложения (8.3). Чтобы оценить  $\Delta x_{\text{макс}}$ , рассмотрим самый общий случай, когда для результата прямого измерения  $\bar{x}$  существенны и систематические ( $\Delta_c$ ) и случайные погрешности ( $\Delta$ ) среднего и когда погрешность прибора  $\Delta_{\text{п}}$  задается как предельная  $\Delta_{\text{макс}}$  и поэтому, вообще говоря, должна учитываться особо. В этом случае имеем

$$\bar{x} = \mu_x + \Delta_c + \Delta + \Delta_{\text{макс}}. \quad (8.7)$$

Подставляя (8.7) в выражение для  $\Delta \bar{x}$ , получим

$$\Delta x = |\Delta_c + \Delta + \Delta_{\text{макс}}|. \quad (8.8)$$

В лабораториях физического практикума, как правило, ограничиваются коэффициентами доверия порядка  $0,8 \div 0,9$  (не больше). Поэтому на основании неравенства Чебышева можно предполагать, что погрешности, превышающие величину  $3\sigma$ , будут встречаться редко. Кроме того, из физических соображений ясно, что погрешности не могут быть неограниченными. Используя это предположение, получим следующую верхнюю границу для  $\Delta x$ :

$$\Delta x_{\text{макс}} \leq 3\sigma_{\Sigma} + 3s_{\bar{x}} + \Delta_{\text{макс}}, \quad (8.9)$$

где мы использовали обозначения § 7.

Надо отметить, что величина  $3s_{\bar{x}}$  будет достаточно хорошо представлять верхнюю границу случайной погрешности только в случае, когда  $s_{\bar{x}}$  близко к стандартному отклонению среднего, т. е. если проделано не менее 10 измерений (см. § 27). Очевидно, что такое число измерений необходимо выполнить только в случае, когда случайные погрешности велики. Если же они малы, то ими можно пренебречь.

Окончательно условие возможности разложения (8.3) примет следующий вид:

$$3(\sigma_{\Sigma} + s_{\bar{x}}) + \Delta_{\text{макс}} \leq \frac{0,2 \left| \frac{df}{d\bar{x}} \right| \mu_x}{\left| \frac{d^2 f}{d\bar{x}^2} \right|_c}. \quad (8.6')$$

При проверке условия (8.6') могут быть два случая:

1) если неравенство (8.6') не выполняется, то разложение в ряд Тейлора (8.3) использовать нельзя и бесполезно вычислять оценку  $\bar{z}$  искомой величины  $\mu_z$  из уравнения косвенных измерений, так как нельзя определить погрешность полученного значения  $\bar{z}$ . В этом случае нужно увеличить число измерений или использовать более точные приборы, чтобы снизить погрешности и таким образом добиться выполнения условия (8.6'), или же применить другой метод измерения.

В случае функции многих переменных если хотя бы для одного переменного не выполняется условие (8.6'), то разложение в ряд Тейлора использовать нельзя.

2) в случае выполнения условия (8.6') с помощью разложения (8.3) можно получить следующие результаты.

Используя (8.1), перепишем (8.3) в виде

$$\bar{z} - \mu_z = \left. \frac{df}{d\bar{x}} \right|_{\mu_x} \cdot (\bar{x} - \mu_x). \quad (8.3')$$

Вычислим математические ожидания для обеих частей равенства (8.3'), используя теоремы о математическом ожидании суммы и произведения (см. приложение А). Для левой части равенства имеем

$$M(\bar{z} - \mu_z) = M(\bar{z}) - \mu_z.$$

Для правой

$$M\left(\left.\frac{df}{d\bar{x}}\right|_{\mu_x} \cdot (\bar{x} - \mu_x)\right) = M\left(\left.\frac{df}{d\bar{x}}\right|_{\mu_x}\right) \cdot M(\bar{x} - \mu_x) = 0.$$

Приравнявая оба значения, получим

$$M(\bar{z}) = \mu_z, \quad (8.10)$$

т. е. математическое ожидание функции от выборочного среднего значения аргумента равно искомому значению функции, т. е. функции от математического ожидания аргумента. На этом основании значение  $\bar{z}$ , определяемое соотношением (8.2), в случае справедливости разложения (8.3) принимается за оценку искомой величины  $\mu_z$  в случае косвенных измерений.

Определим теперь возможные погрешности в оценке  $\bar{z}$ , предполагая, что для  $\bar{x}$  существенны все виды погрешностей. Однако в отличие от представления (8.7) погрешности, задаваемые как предельные, будем учитывать так же, как и все остальные систематические погрешности величины  $\bar{x}^*$ . Для этого, как уже было сказано выше (см. § 6), либо с помощью функции распределения, когда она известна, либо приближенно по формуле (8.7) определяется стандартное отклонение этой погрешности, с учетом которого затем вычисляется  $\sigma_z$  по формуле (8.8). Таким образом, вместо (8.7) мы теперь будем использовать следующее представление для  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = \mu_x + \Delta_\Sigma + \Delta. \quad (8.7')$$

Возведем в квадрат обе части равенства (8.3'), в которое вместо  $\bar{x}$  подставим его выражение (8.7'), и вычислим математическое ожидание для каждой части. Для левой части равенства получим согласно определению дисперсии (см. гл. 5)

$$M((\bar{z} - \mu_z)^2) = \sigma_z^2. \quad (8.11)$$

---

\* Погрешности, задаваемые как предельные, можно учитывать отдельно от остальных методом максимальной погрешности (см. [8]).

Для правой части, используя теоремы о математическом ожидании (см. приложение А) и учитывая независимость различных погрешностей, найдем

$$M \left( \left( \frac{df}{d\bar{x}} \Big|_{\mu_x} \right)^2 (\Delta_{\Sigma} + \Delta)^2 \right) = \left( \frac{df}{d\bar{x}} \Big|_{\mu_x} \right)^2 (\sigma_{\Sigma}^2 + \sigma_x^2). \quad (8.12)$$

Обозначим

$$\sigma_{z\Sigma}^2 = \left( \frac{df}{d\bar{x}} \Big|_{\mu_x} \right)^2 \cdot \sigma_{\Sigma}^2, \quad (8.13)$$

$$\sigma_{zx}^2 = \left( \frac{df}{d\bar{x}} \Big|_{\mu_x} \right)^2 \cdot \sigma_x^2. \quad (8.14)$$

Тогда  $\sigma_z^2$  можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\sigma_z^2 = \sigma_{z\Sigma}^2 + \sigma_{zx}^2, \quad (8.15)$$

где первый член в правой части (8.15) характеризует различные систематические погрешности, а второй — случайные выборочного среднего значения  $\bar{z}$ .

Выражение (8.13) можно использовать для оценки стандартного отклонения различных систематических погрешностей, учитываемых методом рандомизации.

Рассмотрим следующую величину:

$$s_z^2 = \left( \frac{df}{d\bar{x}} \Big|_{\mu_x} \right)^2 \cdot s_x^2. \quad (8.16)$$

Математическое ожидание этой величины равно

$$M(s_z^2) = \left( \frac{df}{d\bar{x}} \Big|_{\mu_x} \right)^2 M(s_x^2) = \left( \frac{df}{d\bar{x}} \Big|_{\mu_x} \right)^2 \cdot \sigma_x^2. \quad (8.17)$$

Поэтому за оценку стандартного отклонения случайных погрешностей примем (см. § 25)

$$s_z = \sqrt{\left( \frac{df}{d\bar{x}} \Big|_{\mu_x} \right)^2 s_x^2}. \quad (8.18)$$

В случае функции  $n$  переменных выражения (8.2), (8.14) и (8.18) обобщаются естественным образом:

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n). \quad (8.2')$$

$$\sigma_{z\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mu_{x_i}} \right)^2 \cdot \sigma_{\Sigma i}^2}, \quad (8.14')$$

$$s_z = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mu_{x_i}} \right)^2 \cdot s_{x_i}^2}. \quad (8.18')$$

Полученные результаты позволяют учитывать погрешности и в случае косвенных измерений в соответствии с § 6. Используя функцию распределения, когда она известна, или неравенство Чебышева и выражение (8.14) для стандартного отклонения систематической погрешности, определяется интервал, в котором с установленной вероятностью может находиться суммарная систематическая погрешность  $\Delta_{\Sigma}$ . Для случайных погрешностей либо указывается оценка стандартного отклонения  $s_z$ , либо, когда систематические погрешности малы, ориентировочный интервал (см. § 27).

*Замечание 1.* Так как на практике нам известны выборочные средние  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ , то вычисления производных выполняются для значений этих выборочных средних.

*Замечание 2.* В формулах (8.14') и 8.18') в подкоренном выражении следует пренебречь слагаемыми, которые не превышают 10% от максимального слагаемого.

## § 9. СОВМЕСТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (МНК)

Рассмотрим случай совместных измерений двух величин  $\beta$  и  $\eta$ . Если уравнения измерения, связывающие эти величины, линейны, то для определения  $\beta$  и  $\eta$  в результате многократных измерений некоторых других величин  $x_i$  и  $y_i$  получится линейная система условных уравнений (см. § 3), каждое из которых имеет вид

$$y_i = \beta x_i + \eta, \quad (9.1)$$

где  $x_i, y_i$  — результаты  $i$ -го измерения величин  $x$  и  $y$ ;  $\beta, \eta$  — искомые величины.

Система уравнений (9.1) будет, вообще говоря, несовместна, так как результаты измерений  $x$  и  $y$  неизбежно содержат погрешности. Поэтому из этих уравнений можно определить только оценки величин  $\beta$  и  $\eta$  (соответственно  $B$  и  $H$ ), которые являются случайными величинами. Погрешности  $B$  и  $H$  нужно учитывать в соответствии с § 6.

Ограничимся рассмотрением случая, когда  $x$  и  $y$  измеряются непосредственно и все пары значений  $x_i, y_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) имеют одинаковый вес (т. е. вклад каждой пары реализуется с одинаковыми вероятностями), случайными и систематическими погрешностями результатов измерений  $x_i$  можно пренебречь, а случайные погрешности  $\Delta_y$  всех  $y_i$  распределены по нормальному закону с одним и тем же стандартным отклонением  $\sigma_y$ , а систематическими погрешностями можно пренебречь\*.

Для наглядности дальнейшего изложения представим все опытные данные  $x_i, y_i$  (см. табл. 1) на графике (см. рис. 2). Геометрически задача измерения  $\eta$  и  $\beta$  состоит в определении параметров

---

\* На практике эти условия, как правило, не выполняются. Поэтому метод наименьших квадратов может приводить к ошибочным оценкам. Кроме того, этому методу свойственны принципиальные недостатки (см. гл. VII).

Таблица 1

Зависимость величины  $y$  от  $x$ 

$N_{\text{п/п}}$	$x$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	0,2	-0,9	0,81	0,31	-1,36	1,85	1,22
2	0,4	-0,7	0,49	0,59	-1,08	1,17	0,76
3	0,6	-0,5	0,25	0,82	-0,85	0,72	0,42
4	0,8	-0,3	0,09	1,17	-0,50	0,25	0,15
5	1,0	-0,1	0,01	1,55	-0,12	0,01	0,01
6	1,2	0,1	0,01	1,87	0,20	0,04	0,02
7	1,4	0,3	0,09	2,20	0,53	0,28	0,16
8	1,6	0,5	0,25	2,35	0,68	0,46	0,34
9	1,8	0,7	0,49	2,65	0,98	0,96	0,69
10	2,0	0,9	0,81	3,20	1,53	2,44	1,38

некоторой прямой: значения ординаты при нулевом значении абсциссы и тангенса угла наклона соответственно.

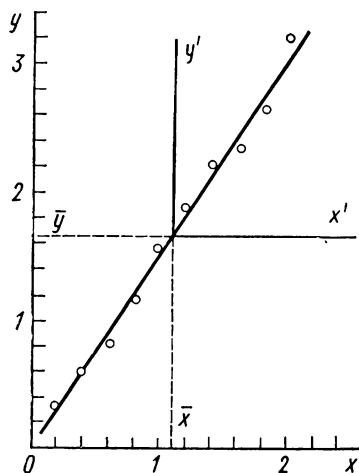


Рис. 2. Построение прямой по данным совместных измерений методом наименьших квадратов

Так как между точками на графике можно провести не одну прямую, возникает задача — провести прямую наилучшим образом. Такая прямая характеризуется наиболее точными оценками коэффициентов  $\beta$  и  $\eta$ , т. е. наиболее вероятными.

Можно показать [9], что оценки коэффициентов  $\beta$  и  $\eta$  будут наиболее вероятными, соответственно прямая будет наилучшей, если сумма квадратов разностей

$$\Delta y_i = y_i - (Bx_i + H)$$

будет минимальна, т. е.

$$\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = Q_{\min}. \quad (9.2)$$

Это условие выполняется, если приравнять нулю производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial H} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (Bx_i + H)) = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial B} &= -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - (Bx_i + H)) = 0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Отсюда найдем

$$\sum_{i=1}^n y_i = B \sum_{i=1}^n x_i + nH \quad (9.4)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = B \sum_{i=1}^n x_i^2 + H \sum_{i=1}^n x_i. \quad (9.4')$$

Из (9.4) следует, что оценка  $B$  определяется выражением

$$B = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad (9.5)$$

а оценка  $H$  — формулой:

$$H = \bar{y} - B\bar{x}, \quad (9.6)$$

где  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  определяются соответственно как

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (9.7)$$

Формула (9.5) часто приводит к большим числам, что осложняет вычисления. Поэтому для ее упрощения сделаем замену переменных

$$x_i' = x_i - \bar{x}; \quad y_i' = y_i - \bar{y}, \quad (9.8)$$

которая соответствует переносу начала координат в точку с координатами  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  (центр тяжести), через которую проходит искомая прямая. В новых переменных формула (9.5) принимает вид

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i' \cdot y_i'}{\sum_{i=1}^n (x_i')^2}. \quad (9.5')$$



Возвращаясь к первоначальным координатам, получим

$$B = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y}) / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (9.5'')$$

Таким образом, формулы (9.5'') и (9.6) вместе с (9.7) позволяют определить оценки  $H$  и  $B$ . Что же касается погрешностей этих оценок, то в лабораториях физического практикума, как правило, бывает достаточно либо вычислить оценку стандартного отклонения коэффициента  $B$ , либо интервал, в котором с установленной вероятностью может находиться искомый коэффициент  $\beta$ . Можно показать [9], что оценка стандартного отклонения коэффициента  $B$  выражается следующим образом:

$$s_B = \frac{s_y}{s_x} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}, \quad (9.8)$$

где использованы обозначения

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (9.9)$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (9.10)$$

и оценка коэффициента корреляции

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y})}{((n-1) s_x s_y)}. \quad (9.11)$$

Интервал, в котором с установленной вероятностью  $\alpha_0$  может находиться коэффициент  $\beta$ , записывается в виде [9]

$$B - t_{\alpha_0, n-2} \cdot s_B \leq \beta \leq B + t_{\alpha_0, n-2} \cdot s_B, \quad (9.12)$$

где  $B$  определено формулой (9.5''),  $s_B$  — формулой (9.8), а  $t_{\alpha_0, n-2}$  — коэффициент Стьюдента для надежности  $\alpha_0$  и значения параметра  $n-2$  и  $n$  — число пар точек.

**Пример.** Пусть для определения коэффициентов  $\beta$  и  $\eta$  произведено десять измерений пар величин  $x$  и  $y$ , результаты которых приведены в табл. 1. Если известно, что система уравнений измерения имеет вид (9.1) и применимы ограничения, изложенные выше, то можно использовать формулы настоящего параграфа.

Вычислим величины

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 1, \quad 1; \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = 1,67.$$

По формуле (9.5'') найдем оценку  $B$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = 1,54,$$

а оценку  $H$  — по формуле (9.6)

$$H = \bar{y} - B\bar{x} = -0,02.$$

На рис. 2 приведены экспериментальные значения  $x_i$ ,  $y_i$  и наилучшая прямая, уравнение которой имеет вид

$$y = 1,54x - 0,02. \quad (9.13)$$

Оценка стандартного отклонения для коэффициента  $B$  равна

$$s_B = \frac{s_y}{s_{x^*}} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = 0,11.$$

Интервал, в котором с вероятностью  $\alpha_0 = 0,90$  может находиться коэффициент  $\beta$ , имеет вид (см. § 27):  $\beta = 1,54 \pm 0,21$ , коэффициент доверия  $\alpha_0 = 0,9$ . В вычислениях использована величина  $t_{0,9;8} = 1,9$  (см. табл. II приложения Б).

*Замечание 1.* Во многих случаях вид уравнений измерения неизвестен. В этом случае сначала из каких-либо соображений (например, по графику) выбирают формулу измерения, а затем методом наименьших квадратов вычисляют значения коэффициентов в выбранной формуле. Однако надежность таких оценок часто сомнительна (см. гл. 7).

### ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К ОФОРМЛЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Результаты измерений необходимо записывать и обрабатывать определенным образом. Разумная схема записи предупреждает грубые ошибки при выполнении измерений, экономит время, позволяет по записи быстро понять смысл работы.

Результаты прямых измерений записываются только в журнал лабораторных работ. Для вспомогательных расчетов можно использовать черновики. Всю подготовительную работу (оформление вводной части, вычерчивание таблиц для записи результатов прямых измерений, подготовка миллиметровой бумаги для графиков и т. д.; см. ниже) следует выполнять накануне с тем, чтобы время работы в лаборатории использовать наиболее рационально: проводить эксперимент, выполнять измерения, записывать и обрабатывать результаты измерений. Правильно оформленная лабораторная работа — это отчет, основу которого составляют три части. В первой, вводной, части описываются установка и применяемый метод измерения. Во второй, основной, части должны содержаться результаты всех прямых измерений. Итоговые результаты эксперимента и выводы приводятся в третьей части.

В данной главе вопросы оформления рассматриваются в соответствии с требованиями, существующими в лабораториях физического практикума. Дополнительные полезные сведения об оформлении можно найти в [10].

#### § 10. ОФОРМЛЕНИЕ ВВОДНОЙ ЧАСТИ

Вводная часть должна содержать краткое описание примененного метода измерений и основных элементов (узлов) установки, которая используется для реализации этого метода. В этой части следует также указать основные характеристики используемых приборов (погрешности, пределы значений измеряемой величины и т. д.)

Трудно дать одну точную схему, согласно которой следует оформлять вводную часть для всех задач физического практикума. Однако можно рекомендовать следующую примерную схему:

1. Указать название задачи.
2. Нарисовать схематический чертеж, рисунок, электрическую или оптическую схему, поясняющую идею применяемого метода измерений. На чертеже обозначить характерные величины.

3. В одном-двух предложениях сформулировать идею метода измерений.

4. Привести основные расчетные формулы.

5. Привести обозначения и названия величин, встречающихся в задаче.

6. Указать название, диапазон измерения, цену деления и погрешности для всех используемых приборов.

7. Для каждого упражнения записываются название и номер. Если в данном упражнении используются дополнительные формулы, приборы, применяется другой метод измерения, то это необходимо указать согласно данной схеме.

## § 11. ЗАПИСЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Результаты измерений рекомендуется записывать в таблицы, которые оформляются накануне выполнения задачи следующим образом:

1. Сначала записываются номер таблицы и ее название.

2. Каждый столбец (или строка) таблицы должны включать как название, так и обозначение измеряемой величины и указание единицы ее измерения.

3. Разумно в первых столбцах записывать величины, играющие роль аргумента (например, время, температура и т. д.), а в последних — играющие роль функции (скорость, теплоемкость и т. д.).

4. Иногда бывает удобно рядом со столбцом для некоторой величины  $x_i$  записывать столбцы для разности этой величины и выборочного среднего значения  $(x_i - \bar{x})$  и квадрата этой разности  $(x_i - \bar{x})^2$ .

5. Таблицы следует чертить только по линейке. Желательно, чтобы таблица результатов измерений выглядела приемлемой с эстетической точки зрения (разные цвета для линий и цифр и т. д.).

После окончания измерений в соответствии с § 7-9 проводятся расчеты. Сначала вычисляют выборочные средние и оценки стандартных отклонений случайных и систематических погрешностей для прямых измерений. Если искомая величина — результат косвенных или совместных измерений, то проделявают необходимые расчеты соответствующих оценок значений математического ожидания искомой величины и стандартных отклонений (см. § 8, 9). В журнале лабораторных работ для каждой рассчитываемой величины сначала записывается алгебраическая формула, затем переписывается та же формула с подставленными в нее числовыми значениями и, наконец, приводится результат вычислений. Таким образом рекомендуется придерживаться схемы: алгебраическая формула — арифметическое выражение — результат расчета. Для записи результатов промежуточных вычислений можно использовать черновики. Сами расчеты выполняются с помощью карманного калькулятора или ЭВМ. Если результат вычисляется на ЭВМ,

то ленту — выдачу с ЭВМ нужно подклеить после соответствующих формул, сделав необходимые пояснения.

Затем в случаях, когда это возможно, определяется интервал, в котором искомая величина может находиться с заданной вероятностью.

Таблица 2  
Зависимость стрелы прогиба от нагрузки

№ п/п	Нагрузка $P$ (масса гирь), кг	Стрела прогиба $\lambda$ , дел. шкалы
1	1	7,5
2	2	14,0
3	3	22,5

**Пример.** Таблица 2 иллюстрирует п.п. 1—5 рекомендуемой схемы (см. задачу № 2 [1]). Дальнейшая обработка результатов прямых измерений из табл. 2 должна проводиться в соответствии с § 7. Наконец, модуль Юнга  $E$  рассчитывается из уравнения совместных измерений (см. § 9):

$$P_i = \frac{4ab^3}{L^3} E \lambda_i, \quad (11.1)$$

где  $L$ ,  $a$ ,  $b$  — соответственно длина, ширина и высота стержня (см. [1]). Условные уравнения (10.1) решаются либо методом наименьших квадратов (см. § 9), либо как-нибудь иначе (например, на начальном этапе обучения на графике аккуратно на глаз проводится прямая возможно ближе ко всем экспериментальным точкам и определяется тангенс угла наклона для этой прямой, из которого рассчитывается модуль Юнга).

## § 12. ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА. ВЫВОДЫ

В третьей части отчета нужно привести все итоговые результаты эксперимента и сделать необходимые выводы.

В лабораториях физического практикума результаты эксперимента принято указывать одним из следующих способов (см. § 6).

1. Приводится интервал, в котором с установленной вероятностью может находиться измеряемая величина.

**Пример.** Ускорение свободного падения  $g = (9,83 \pm 0,05) \text{ м/с}^2$ , коэффициент доверия  $\alpha_0 = 0,8$ .

2. Указывается оценка математического ожидания (т. е. приводится выборочное среднее) для измеряемой величины, приводится интервал, в котором с установленной вероятностью может находиться систематическая погрешность, указывается оценка стандартного отклонения для случайных погрешностей выборочного среднего.

**Пример.** Сила тока  $\bar{I}=0,05$  А;  $\Delta_c=\pm 0,005$  А, коэффициент доверия  $\alpha_0=0,99$ ;  $s_{\bar{I}}=0,002$  А.

3. Приводятся оценки математического ожидания для измеряемой величины и стандартных отклонений для систематических и случайных погрешностей выборочного среднего.

**Пример.** Толщина пластинки  $\bar{d}=4,17$  мм;  $\sigma_c=0,003$  мм,  $s_{\bar{d}}=0,004$  мм.

Как видно из вышеприведенных примеров, обязательно указываются словесное наименование измеряемой величины, ее буквенное обозначение и единица измерения.

Если результаты каких-либо прямых или косвенных экспериментов легко можно получить из других опытов (с использованием некоторых простейших измерений), то рекомендуется провести сопоставление итоговых данных всех выполненных экспериментальных исследований. Для дополнительных экспериментов приводятся уравнения измерений, согласно которым были рассчитаны значения искомых величин. В таблице 3 приводится пример такого сравнения, когда сопоставляются значения моментов инерции простейших фигур, полученные согласно описанному методу измерений, и из уравнений косвенных измерений, указанных в этой таблице (см. лабораторную работу 5 из гл. 8).

Т а б л и ц а 3

Моменты инерции некоторых тел

Тело	Эксперимент	Расчет по формуле*
	$I \cdot 10^3$ , кг·м <sup>2</sup> , коэффициент доверия $\alpha_0 = 0,8$	$I \cdot 10^3$ , кг·м <sup>2</sup> , коэффициент доверия $\alpha_0 = 0,9$
Диск	$0,25 \pm 0,1$	$\frac{1}{2} mR^2 = 0,225 \pm 0,002$
Квадрат	$1,60 \pm 0,05$	$\frac{1}{6} ma^2 = 1,60 \pm 0,01$
Равносторонний треугольник	$0,40 \pm 0,01$	$\frac{1}{12} ma^2 = 0,35 \pm 0,01$
* Массы и размеры тел измеряются экспериментально.		

Если систематические погрешности не определялись по каким-либо причинам (например, на начальном этапе обучения), то необходимо указать: «Систематические погрешности не определялись».

Рекомендуется также проанализировать достоинства и недостатки примененного метода измерений, желательно сопоставить их с аналогичными характеристиками других известных методов измерений искомой величины. В заключение в выводах можно отметить относительную погрешность результатов измерений, соот-

ношение случайной и систематической погрешностей, возможность уменьшения погрешностей и сделать общие замечания о конструкции (схеме) и работе установки.

### § 13. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Как правило, зависимости одних физических величин от других — это гладкие, плавные линии, без резких изломов. Экспериментальные точки вследствие погрешностей измерений не ложатся на гладкие кривые зависимостей для физических величин, а группируются вокруг них случайным образом. Поэтому не следует соединять соседние экспериментальные точки на графике отрезками прямой и получать таким образом некоторую ломаную линию.

Проводить гладкие кривые, соответствующие зависимостям одних физических величин от других, следует в соответствии с методом редукции измерений (см. гл. 7) или, если выполнены условия применимости, использовать метод наименьших квадратов (см. гл. 3). Сначала из уравнений измерения необходимо выяснить, какая имеется зависимость (линейная, степенная, экспоненциальная и т. д.). Как правило, разумно, если это возможно, сделать такую замену переменных, чтобы в новых переменных зависимость была бы линейной. В случае линейной зависимости легко определяется угловой коэффициент прямой — практически единственный искомый параметр. Второй параметр линейной зависимости, если есть необходимость его оценки, также рассчитывается просто.

Однако в условиях студенческого физического практикума на начальном этапе обучения, как правило, не нужно вычислять оценки параметров линейной зависимости какими-либо сложными методами. В этом случае прямую на графике следует проводить на глаз так, чтобы она проходила примерно в средней части всей совокупности экспериментальных точек. В случае построения нелинейных зависимостей следует обращаться к литературе [2, 3, 9].

Графики выполняются преимущественно на миллиметровой бумаге. Сначала нужно выбрать масштаб по осям координат. Масштаб выбирается таким образом, чтобы угол наклона прямых (или касательных к кривым) на графике был близок к  $45^\circ$  (если не имеют в виду показать, что функция является постоянной, или другие специальные случаи). Кривые должны занимать практически все поле чертежа (т. е. должно быть соответствие между протяженностью кривой и размером чертежа). За единицу масштаба разумно выбирать только числа, кратные 5, 10, 50, 100 мм.

В качестве осей координат следует использовать прямоугольную рамку (это облегчает пользование чертежом). На осях координат (левой и правой, нижней и верхней) наносят метки, соответствующие выраженным цифровым значениям (т. е. числам, кратным 1, 5, 10 и т. д.). Цифровые значения проставляются (на левой и нижней осях) только для крупных единиц масштаба. Около осей координат (слева и внизу) необходимо написать названия

величин, которые отложены по ним, их обозначение и единицы измерения. Все надписи и цифровые значения должны быть крупными (размер букв и цифр не менее 5 мм).

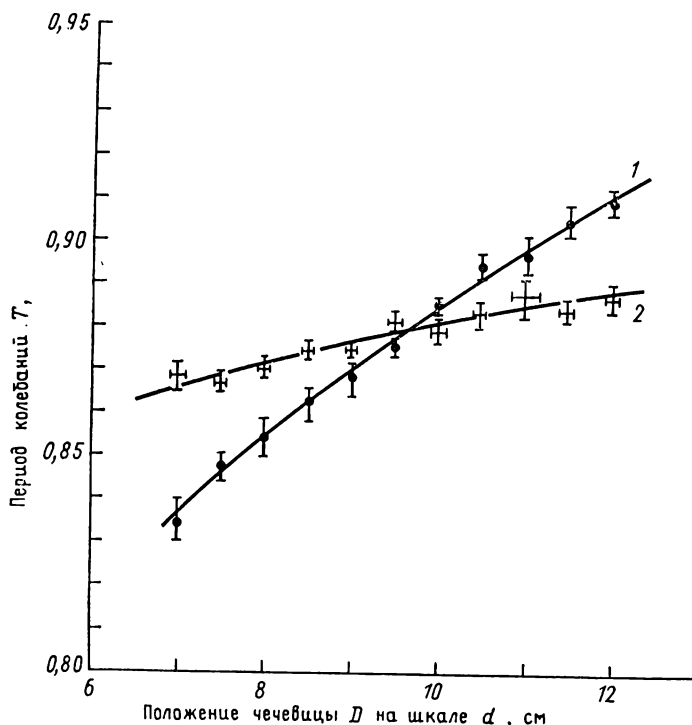


Рис. 3. Зависимость периода колебаний маятника от положения чечевицы. 1 — опорная призма  $B_1$ ; 2 — опорная призма  $B_2$

Экспериментальные точки наносятся на чертеж в виде условных знаков небольшого размера (кружочки, квадратики, крестики и т. д.). Желательно для каждой точки на графике указывать погрешности в виде отрезков длиной в одно стандартное отклонение. Погрешности можно указывать для одной или двух переменных (см. рис. 3). Следует отметить, что могут быть случаи, когда погрешности, откладываемые вверх и вниз (или же влево и вправо), имеют разную величину. Гладкие кривые, соответствующие экспериментальным точкам, проводят с помощью линейки или лекала. Если имеется несколько кривых, то каждой кривой присваивается номер, а на свободном поле чертежа указывают название, обозначение, цифровое значение и единицу измерения параметра, соответствующего этому номеру. Если имеется теоретическая кривая, то ее наносят на чертеж с указанием, по какой теории она получена. Если имеются кривые или экспериментальные точки,



полученные различными методами, то желательно использовать для их построения линии и знаки разной структуры (сплошные линии, пунктир, кружочки, квадратики и т. д.).

График должен быть выполнен приемлемым с эстетической точки зрения (разные цвета для экспериментальных точек, кривых, осей координат и т. д.). График на рис. 3 иллюстрирует содержание настоящего параграфа на примере лабораторной работы 3 из гл. 8. Готовые графики подклеиваются в журнал лабораторных работ на место, на котором оформлена соответствующая задача, и делается подпись под графиком, разъясняющая изображенное.

#### § 14. ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

Очевидно, что результаты измерений — значения выборочного среднего и выборочного стандартного отклонения среднего — приближенные числа. Обычно приближенные числа (см., например, таблицы значений каких-либо функций — синуса, косинуса и т. д.) записывают с конечным числом значащих цифр. Погрешность последней цифры определяется правилами округления, а все предыдущие цифры считаются верными. Как известно, при округлении последняя цифра увеличивается на 1 единицу значения своего разряда, если последовательность отбрасываемых цифр, стоящих правее последней, превышает половину значения этой единицы, и остается неизменной в противном случае. Так как относительная погрешность выборочного стандартного отклонения среднего может превышать  $\sim 10\%$  (в условиях работы в лабораториях общего физического практикума), то естественно использовать одну-две значащие цифры для представления его значения. Последняя значащая цифра выборочного среднего должна быть в том же разряде, в каком находится аналогичная цифра выборочного стандартного отклонения среднего. Например, если оценка погрешности равна 0,12, то результат мог бы быть представлен как 1,23. При расчетах результата косвенных измерений или в иных случаях, когда приходится выполнять вычисления с приближенными числами, необходимо помнить несколько простых правил. При сложении и вычитании обычно у членов суммы (или разности) последняя значащая цифра находится в разных разрядах. Перед выполнением операций сложения (или вычитания) нужно определить самый старший разряд, в котором находится последняя цифра у одного из членов суммы (разности), и все остальные члены суммы (разности) округлить до этого разряда. Например,

$$3,14 + 25$$

нужно представить как

$$3 + 25.$$

Результат умножения или деления, очевидно, не может содержать больше верных значащих цифр, чем их содержит сомножитель

(или делимое, или делитель) с минимальным числом значащих цифр. Поэтому результат умножения (деления) необходимо округлять до этого минимального числа значащих цифр. Например, результат умножения двух чисел 3,14 и 25 следует представить как

$$3,14 \cdot 25 = 78.$$

При возведении в степень или извлечении корня (любой степени), логарифмировании или вычислении какой-либо стандартной функции результат записывается с тем же числом значащих цифр, какое содержит аргумент.

При выполнении какой-либо комбинации арифметических операций у чисел, соответствующих промежуточным результатам, сохраняют на одну значащую цифру больше, чтобы избежать дополнительных погрешностей, связанных с округлением.

Если вычисления проводятся на карманном калькуляторе или ЭВМ, то разрядность представления чисел определяется конструкцией калькулятора (ЭВМ). Очевидно, результат вычислений следует переписывать с числом значащих цифр, соответствующих минимальному в одном из сомножителей (или аргументе функции). Надо стараться избегать ошибочной практики, когда результаты вычислений переписывают с таким числом значащих цифр, которое выдает калькулятор (ЭВМ).

Например, если сомножитель (или аргумент функции) содержал две значащие цифры, а результат вычислений представлен на табло калькулятора (дисплее, распечатке с ЭВМ) девятью цифрами, то следует переписать результат только с двумя значащими цифрами.

## § 15. СВОДКА ПРАВИЛ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

### *1. Прямые измерения*

1. Результаты измерений записываются в таблицы в соответствии с § 11 гл. 6 части I.

2. Вычисляются выборочные средние

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

3. Вычисляются выборочные стандартные отклонения среднего

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

4. Определяются различные систематические погрешности и рассчитывается суммарная систематическая погрешность (см. § 7)

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_{\Pi}^2 + \sigma_0^2 + \sigma_M^2 + \sigma_{\text{суб}}^2 + \dots}.$$

где погрешность прибора  $\sigma_{\text{п}}$  определяется по паспорту прибора. Если погрешность прибора задается как предельная (максимальная)  $\Delta_{\text{макс}}$ , то приближенно  $\sigma_{\text{п}} \cong \Delta_{\text{макс}} / \sqrt{12}$ ; погрешность округления  $\sigma_{\text{о}} = \omega / \sqrt{12}$ , где  $\omega$  — цена деления прибора, или та удвоенная доля деления, до которой производится округление (см. § 7);  $\sigma_{\text{суб}}$  — субъективная погрешность (см. § 7), может входить в методическую;  $\sigma_{\text{м}}$  — систематическая погрешность метода измерений (см. § 7). В выражении для  $\sigma_{\Sigma}$  пренебрегают всеми составляющими погрешности, которые не превышают 10% от максимального значения слагаемого, входящего в сумму.

5. Задается коэффициент доверия (вероятность)  $\alpha_0$ .

6. Для систематической погрешности вычисляется полуширина интервала по одной из формул:

а)  $\Delta_{\text{с}} = \Delta_{\text{макс}}$ ;

б)  $\Delta_{\text{с}} = \frac{\alpha_0 \omega}{2}$ ;

в)  $\Delta_{\text{с}} = \gamma_{\alpha_0} \sigma_{\Sigma}$ .

Формула а) применяется, когда существенна только погрешность прибора, задаваемая как предельная. В этом случае вероятность практически равна 100%.

Формула б) применяется, когда существенна только погрешность округления. Коэффициент доверия и в этом случае равен практически  $\sim 100\%$ .

Формула в) применяется в остальных случаях.

7. Когда существенны только случайные погрешности (т. е. когда  $s_{\bar{x}} > 3\sigma_{\Sigma}$ ), то можно вычислить полуширину интервала, если эти погрешности распределены по нормальному закону

$$\Delta = t_{\alpha, n-1} \cdot s_{\bar{x}}.$$

8. Окончательный результат записывается одним из следующих возможных способов (см. § 21):

а)  $\mu = \bar{x} \pm \Delta$ ; коэффициент доверия  $\alpha = \alpha_0$ ;

б)  $\mu = \bar{x}$ ;  $\Delta_{\text{с}} = (\text{число})$ , коэффициент доверия  $\alpha = \alpha_0$ ;  $s_{\bar{x}} = (\text{число})$ ;  $n = (\text{число})$ ;

в)  $\mu = \bar{x}$ ;  $\sigma_{\Sigma} = (\text{число})$ ,  $s_{\bar{x}} = (\text{число})$ ;  $n = (\text{число})$ .

Формула а) применяется, когда либо случайными, либо систематическими погрешностями можно пренебречь;  $\Delta$  определяется тогда соответственно либо как  $\Delta_{\text{с}}$ , либо как случайная погрешность  $\Delta$ .

Формула б) применяется, когда систематическая погрешность учитывается интервалом.

Формула в) применяется в остальных случаях.

9. Множители  $t_{\alpha, n-1}$ ;  $\gamma_{\alpha}$  определяются из таблиц II, III приложения Б.

## II. Косвенные измерения

1. Результаты измерений записываются в таблицы в соответствии с § 11 гл. 4.

2. Для результатов прямых измерений аргументов  $x_i$  функции  $f$ , где  $i$  — номер аргумента, вычисляются:

а) выборочные средние

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} x_{i,k};$$

б) выборочные стандартные отклонения среднего

$$s_{\bar{x}_i} = \sqrt{\frac{1}{n_i (n_i - 1)} \sum_{k=1}^{n_i} (x_{i,k} - \bar{x}_i)^2}.$$

3. Для каждого аргумента вычисляются:

а) суммарные систематические погрешности

$$\sigma_{\Sigma i} = \sqrt{\sigma_{\text{нт}}^2 + \sigma_{\text{от}}^2 + \sigma_{\text{мт}}^2 + \sigma_{\text{субт}}^2 + \dots};$$

б) интервалы

$$\Delta x_i = \frac{0,2 \left| \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}_i} \right|}{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}_i^2} \right|}.$$

4. Для каждого аргумента проверяется условие (см. § 8)

$$\Delta x_i \geq 3 (\sigma_{\Sigma i} + s_{\bar{x}_i}).$$

Если это условие не выполняется хотя бы для одного из аргументов, то измерения продолжают до тех пор, пока это условие не начнет выполняться, иначе используют более точные приборы или иной метод измерений (см. § 8).

5. Вычисляется выборочное среднее функции

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots).$$

6. Вычисляется стандартное отклонение систематических погрешностей

$$\sigma_{z\Sigma} = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{\Sigma i} \right)^2}.$$

7. Вычисляется оценка стандартного отклонения среднего для случайных погрешностей

$$s_{\bar{z}} = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot s_{\bar{x}_i} \right)^2}.$$

8. Задается коэффициент доверия  $\alpha_0$ .  
 9. Вычисляется полуширина интервала для систематической погрешности

$$\Delta_c = \gamma_{\alpha_0} \cdot \sigma_{\bar{z}\Sigma}.$$

10. Окончательный результат записывается в виде:

- а)  $\mu = \bar{z} \pm \Delta_c$ ; коэффициент доверия  $\alpha = \alpha_0$ ;  
 б)  $\mu = \bar{z}$ ;  $\Delta_c = (\text{число})$ , коэффициент доверия  $\alpha = \alpha_0$ ;  $s_{\bar{z}} = (\text{число})$ ;  
 в)  $\mu = \bar{z}$ ;  $\sigma_{\bar{z}\Sigma} = (\text{число})$ ;  $s_{\bar{z}} = (\text{число})$ .

Формула а) применяется, когда случайные погрешности малы.  
 Формула б) применяется, когда систематическая погрешность учитывается заданием интервала.

Формула в) применяется в остальных случаях.

11. Множитель  $\gamma_\alpha$  находят из табл. III приложения Б.

### III. Совместные измерения. Метод наименьших квадратов (МНК)

1. Результаты измерений записываются в таблицы в соответствии с § 11 гл. 4.

2. Если уравнения измерений линейны, переменная  $x$  не содержит погрешностей, а переменная  $y$  распределена нормально и определяется из равноточных измерений (т. е. стандартное отклонение  $\sigma_y$  одинаково для всех значений  $y_i$ ) и систематические погрешности малы, то вычисляется коэффициент  $B$ :

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

и  $n$  — число пар точек  $x_i, y_i$ .

3. Коэффициент  $H$  вычисляют из уравнения

$$H = \bar{y} - B\bar{x}.$$

4. Задается коэффициент доверия  $\alpha_0$ .

5. Вычисляется полуширина интервала для коэффициента  $B$

$$\Delta B = t_{\alpha, n-2} \cdot (s_y/s_x) \sqrt{(1-r^2)/(n-2)},$$

где

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2};$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2};$$

$$r = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / ((n-1) s_x s_y) = B (s_x / s_y).$$

6. Для коэффициента  $\beta$  определяют интервал  $\beta = B \pm \Delta B$ , коэффициент доверия  $\alpha = \alpha_0$ .

7. Прямую

$$y = Bx + H$$

строят на графике в соответствии с § 13.

8. Коэффициент  $t_{\alpha_0, n-2}$  находят из табл. II в приложении Б.

*Замечание.* Все вычисления следует выполнять в соответствии с правилами гл. 4, § 14.

## ГЛАВА 5

### НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

#### § 16. ПОНЯТИЕ О СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЕ

В практике экспериментальных исследований часто встречаются случаи, когда какая-либо величина измеряется много раз при одинаковых условиях. В результате каждого измерения получается некоторое число. Иногда бывает, что возможно предсказать, какое именно число получится при выполнении следующего измерения. Но значительно чаще этого сделать невозможно. Небольшие отклонения от начальных условий, которые экспериментатор не в силах заметить и проконтролировать, делают совершенно безнадежными любые попытки предсказать результат очередного измерения.

В этом случае, когда результат эксперимента может меняться от одного наблюдения к другому самым неправильным образом, когда все попытки предсказания результата очередного измерения не оправдываются, говорят, что имеют дело с последовательностью случайных экспериментов, а о результатах измерений говорят как о случайных величинах.

Случайная величина может быть дискретной (например, число броуновских частиц в поле зрения микроскопа) или непрерывной (например, результаты измерения толщины пластинки микрометром).

По своей природе многие величины в рамках классической физики являются вполне определенными, неслучайными (например, толщина пластинки, время между двумя событиями и т. д.). Однако из-за влияния различных случайных факторов в процессе эксперимента результаты измерений — случайные величины.

Однако имеются и такие величины, которые уже по своей природе случайны (например, число броуновских частиц в поле зрения микроскопа, параметры, описывающие явления в газах, плазме и др., радиоактивный распад и другие статистические явления описываются случайными величинами).

**Пример 1.** Рассмотрим две последовательности (А) и (Б) троек чисел:

001, 004, 009, 016, 025, 036, 049, 064	:	:	:	:	:	(А)
294, 976, 480, 181, 393, 522, 607, 903	:	:	:	:	:	(Б).

В случае последовательности (А) легко угадывается закономерность:  $n$ -я тройка чисел есть просто три последние цифры квадра-

та натурального числа  $n$ . Последовательность же (Б) является случайной. Не существует способа, который позволил бы предсказать цифры в любой тройке.

Фундаментальное различие между последовательностями (А) и (Б) проявляется при передаче этих последовательностей от одного лица к другому или от источника к приемнику. В случае последовательности (А) достаточно передать закон:  $n$ -я тройка есть три последние цифры квадрата натурального числа  $n$ . В случае же последовательности (Б) необходимо передавать каждую цифру каждой тройки [11] (подробнее см. [12, 13]).

### **§ 17. СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ. ВЕРОЯТНОСТЬ. ДОСТОВЕРНЫЕ И НЕДОСТОВЕРНЫЕ СОБЫТИЯ. СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

Предсказать, сколько броуновских частиц можно будет увидеть в поле зрения микроскопа при очередном наблюдении, невозможно. Однако, если проделать достаточно большое число наблюдений  $n$ , а затем спросить, сколько раз в поле зрения будет наблюдаться, например, 5 частиц, то проблема предсказания не оказывается такой уж безнадежной.

Пусть 5 частиц мы наблюдали  $m$  раз. Величину  $m/n$  называют частотой события, состоящего в наблюдении пяти частиц.

Частота  $m/n$  какого-либо фиксированного события для возрастающих значений  $n$  обнаруживает тенденцию принимать при больших значениях  $n$  более или менее постоянное значение, т. е. обнаруживает статистическую устойчивость.

**Пример 2.** Пусть эксперимент состоит в бросании монеты, а событие — в выпадении герба. Пусть число бросаний в одной серии наблюдений равно  $n$ . Рассмотрим набор серий из  $n$  бросаний каждая. Если число бросаний в каждой серии невелико (например,  $n=2$ ), то частота выпадения герба от одной серии к другой сильно флуктуирует. Если же число бросаний в каждой серии будет очень велико (например,  $n=10^6$ ), то частота выпадения герба будет испытывать от серии к серии лишь небольшие отклонения от числа 0,5, т. е. будет наблюдаться статистическая устойчивость частоты. Определение статистическая имеет тот смысл, что все же, хотя и крайне редко, но и в этом случае, в принципе возможны заметные отклонения частоты от числа 0,5.

С понятием частоты события связано понятие вероятности этого события. Именно для каждого события, связанного со случайным экспериментом, можно указать такое число  $P$ , называемое вероятностью этого события, что в длинном ряду повторений этого эксперимента частота рассматриваемого события окажется приблизительно равной  $P$ .

Для частоты любого события, очевидно, имеем

$$0 \leq m/n \leq 1.$$



Естественно, что вероятность  $P$  удовлетворяет аналогичному неравенству

$$0 \leq P \leq 1. \quad (17.1)$$

Пусть некоторое событие наступает в подавляющей части всех случаев (например, пусть событие состоит в том, что в поле зрения микроскопа наблюдается меньше 100 частиц, в то время как обычно наблюдают 3—4 частицы). Вероятность этого события, очевидно, заключена в пределах

$$1 - \varepsilon \leq P \leq 1, \quad (17.2)$$

где  $\varepsilon$  — некоторое очень малое положительное число. О таких событиях, которые удовлетворяют неравенству (17.2), говорят как о практически достоверных событиях.

Если же событие наступает в очень малой доле всех случаев (например, одновременное наблюдение более 100 броуновских частиц в случае предыдущего примера), то его вероятность удовлетворяет следующему неравенству:

$$0 \leq P \leq \varepsilon, \quad (17.3)$$

где  $\varepsilon$  — очень малое положительное число, и о таких событиях говорят как о практически недостоверных событиях.

Если два каких-либо события  $A$  и  $B$  несовместны\*, то вероятность осуществления события  $A + B$  (т. е. что наступит хотя бы одно из событий  $A$  или  $B$ ) равна

$$P(A + B) = P(A) + P(B), \quad (17.4)$$

где символ  $P$  — означает вероятность события, а запись в скобках показывает, в чем именно состоит событие. Формула (17.4) известна как формула сложения вероятностей.

Вероятность реализации двух независимых\*\* событий  $A$  и  $B$  равна

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (17.5)$$

Формула (17.5) известна как формула умножения вероятностей.

## § 18. ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ГИСТОГРАММА

Пусть  $\xi$  — некоторая непрерывная случайная величина, например результаты измерений толщины пластинки микрометром. Допустим, что мы сделали очень много измерений. Тогда в соответствии с § 17 настоящей главы мы в состоянии ответить на вопрос, какова вероятность того, что величина  $\xi$  окажется в определенном интервале  $x_i \div x_k$ ? Эта вероятность будет пропорциональна ширине

---

\* События несовместны, если они не могут реализоваться одновременно (см. [12, 13]).

\*\* События независимы, если вероятность осуществления одного из них не зависит от реализации другого [12, 13].

этого интервала  $\Delta x = x_k - x_i$ . Коэффициент пропорциональности, естественно, может зависеть от  $x$ .

Иначе говоря, со случайной величиной  $\xi$  связана некоторая функция  $f(x)$ , называемая функцией плотности вероятности, или функцией плотности, такая, что величина  $f(x)dx$  пропорциональна вероятности события состоящего в том, что величина  $\xi$  заключена в интервале  $x \div x + dx$ .

Условно последнее обстоятельство записывается следующим образом:

$$f(x)dx = P(x \leq \xi \leq x + dx), \quad (18.1)$$

где символ  $P$  обозначает вероятность события, а запись в скобках показывает, в чем именно состоит событие.

Наглядное представление о функции плотности непрерывной случайной величины можно получить, если имеющийся набор значений этой величины представить в виде гистограммы. Гистограмма строится следующим образом. Сначала диапазон имеющихся значений случайной величины, для которой строится гистограмма, разбивают на некоторое произвольное число равных интервалов и выписывают последовательно один под другим эти интервалы в первом столбце таблицы. Затем последовательно от первого до последнего перебирают все значения случайной величины и смотрят, в какой интервал попадает каждое значение, и ставят во втором столбце в строке, соответствующей найденному интервалу, какой-либо условный знак (например, крестик). Наконец, подсчитывают число знаков в каждой строке и в третьем столбце в соответствующей строке записывают полученные значения. Обозначим эти интервалы на оси абсцисс и над каждым интервалом нарисует прямоугольник, высота которого равна полученному числу знаков в третьем столбце таблицы (т. е. числу случаев «падания» значений случайной величины в данный интервал). Полученная система прямоугольников и образует гистограмму.

**Пример 3.** Пусть имеется следующий набор (В) из 10 значений случайной величины  $\xi$ :

0,578; 0,188; 0,060; 0,903; 0,509; 0,777; 0,661; 0,102; 0,760; 0,429 (В)

Из набора (В) видно, что случайная величина принимает значения в интервале между 0 и 1. Разделим этот диапазон на 4 равных интервала длиной по 0,25 каждый и построим таблицу 4, а затем и рис. 4 в соответствии с вышеприведенными правилами. Система прямоугольников на рис. 4 и является гистограммой для набора (В).

Очевидно, что если взять малое число интервалов (например, один), то гистограмма вырождается в один прямоугольник. В случае большого числа интервалов гистограмма вырождается в ряд отдельных прямоугольников и не будет отражать график функции плотности. Обычно число интервалов надо выбирать таким образом, чтобы в каждом интервале было не менее 10 случаев.

Будем увеличивать число значений случайной величины, по которым строится гистограмма, и одновременно увеличивать число интервалов (т. е. делать интервалы все более мелкими). Над интервалами будем рисовать прямоугольники, высоты которых равны числу случаев попадания в интервал, деленному на полное число случаев и на ширину интервала. Для достаточно большого набора значений  $\xi$  полученная гистограмма будет мало отличаться от графика функции плотности случайной величины.

Таблица 4

№ п/п	Интервал	Условные знаки	Количество знаков
1	$0 \div 0,25$	× × ×	3
2	$0,25 \div 0,50$	× × ×	1
3	$0,50 \div 0,75$	× × ×	3
4	$0,75 \div 1,00$	× × ×	3

Например, если набор значений (В) был бы очень большим, то гистограмма на рис. 4 мало бы отличалась от графика функции плотности прямоугольного, или равномерного распределения (см. § 20 и рис. 5).

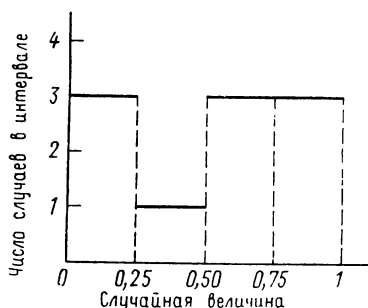


Рис. 4. Гистограмма

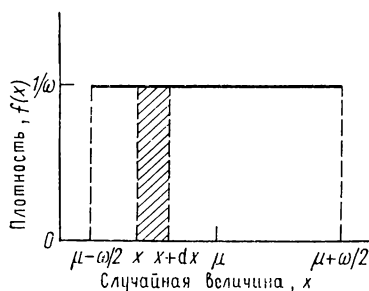


Рис. 5. Функция плотности прямоугольного (равномерного) распределения

На рис. 5 и 6 изображены примеры функций плотности непрерывной случайной величины. Величина  $f(x)dx$  равна площади заштрихованной фигуры (см. рис. 5). Очевидно, что вероятность того, что при измерении вообще получится какое-то число, равна 1, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad (18.2)$$

так как вероятности несовместных событий суммируются (см § 17).

Условие (18.2) называется условием нормировки. В случае

нормированной функции плотности, когда выполнено условие (18.2), площадь заштрихованной фигуры, или величина  $\int f(x) dx$ , равна вероятности события, состоящего в том, что  $\xi$  заключена в интервале  $x \div x + dx$ .

Для случайной величины  $\xi$  определим также функцию  $F(x)$ :

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (18.3)$$

Функция  $F(x)$ , определяемая соотношением (18.3), называется функцией распределения величины  $\xi$ . Функция распределения в данной точке  $x$  равна вероятности того, что случайная величина меньше  $x$ . График этой функции — монотонная кривая, возрастающая от 0 до 1\*.

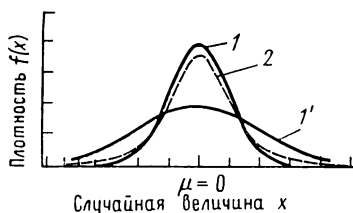


Рис. 6. 1 и 1' — функции плотности нормального распределения с дисперсиями  $\sigma_1 > \sigma_2$

На рис. 5 изображена функция плотности для случайной величины, которая может принимать только ограниченные значения, а на рис. 6 — три функции плотности для случайной величины, значения которой не ограничены.

## § 19. ПОНЯТИЕ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОЖИДАНИИ, МЕДИАНЕ И О ДИСПЕРСИИ

Часто бывает, что нужно описать функцию распределения некоторой случайной величины в общих чертах с помощью одного-двух параметров. В этом случае прежде всего надо указать некоторый «центр», вокруг которого группируются значения этой случайной величины.

Наиболее употребительной и часто наилучшей мерой, характеризующей «центр» распределения значений случайной величины, является математическое ожидание, которое обозначает-

---

\* В случае дискретной случайной величины также можно определить функцию плотности и функцию распределения. Функцию плотности дискретной случайной величины можно представить, если на оси абсцисс отложить возможные дискретные значения этой величины и от этих точек провести вертикальные линии, высота которых равна вероятностям соответствующих значений.

ется как  $M(x)$ . Определяется математическое ожидание для непрерывной величины согласно формуле

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \mu, \quad (19.1)$$

где обозначение  $\mu$  — результат вычисления интеграла.

В случае дискретной случайной величины

$$M(x) = \sum_i P_i x_i = \mu, \quad (19.2)$$

где  $P_i$  — вероятность значения  $x_i$ ;  $\mu$  — результат вычисления суммы.

Если вероятности всех  $x_i$  равны то  $P_i = 1/n$ , где  $n$  — число значений  $x_i$ . Тогда (19.2) переходит в следующую формулу:

$$M(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \mu. \quad (19.3)$$

Если функция плотности  $f(x)$  асимметрична (т. е. имеет длинный «хвост» с какой-либо одной стороны), то «центр» группирования значений случайной величины лучше характеризуется не математическим ожиданием  $\mu$ , а медианой, которая определяется уравнением

$$F(x_{1/2}) = \frac{1}{2}, \quad (19.4)$$

т. е. слева и справа от значения  $x_{1/2}$  площади под кривой плотности равны.

Кроме математического ожидания и медианы функцию распределения можно характеризовать еще параметром, показывающим, насколько широко разбросаны значения случайной величины относительно «центра» распределения.

Наиболее употребительной мерой, характеризующей рассеяние случайной величины, т. е. разброс ее значений относительно «центра», является дисперсия, которая обозначается через  $D(x)$  и определяется согласно формуле

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = M(x^2) - \mu^2 = \sigma^2, \quad (19.5)$$

где  $\sigma^2$  — результат вычисления интеграла и  $M(x^2)$  — математическое ожидание квадрата случайной величины, т. е. интеграл

$$M(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

Квадратный корень из дисперсии, т. е. величина  $\sigma$ , называется среднеквадратичным отклонением, или стандартным отклонением. Чтобы сравнивать рассеяние (разброс) различных случайных величин, вычисляют относительное стандартное отклонение, т. е. величину

$$E = \frac{\sigma}{\mu}. \quad (19.6)$$

В последующем мы будем рассматривать только такие функции распределения, для которых понятия математического ожидания и дисперсии имеют смысл.

## § 20. ПРИМЕРЫ ФУНКЦИЙ ПЛОТНОСТИ

**20.1. Прямоугольное распределение.** Когда считают показания со шкалы измерительных приборов или просто записывают числа с конечным числом значащих цифр, то всегда возникает погрешность (см. гл. 2), связанная с округлением числа, которую можно рассматривать как случайную величину  $\xi$ . Функция плотности этой случайной величины определяется следующей формулой:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{при } \xi \in [\mu - \omega/2, \mu + \omega/2], \\ 0 & \text{при } \xi \notin [\mu - \omega/2, \mu + \omega/2]. \end{cases} \quad (20.1)$$

На рис. 5 изображена эта функция плотности. Распределение, функция плотности которого определяется формулой (20.1), называется прямоугольным, или равномерным, распределением.

Математическое ожидание случайной величины для прямоугольного распределения равно

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{\mu - \omega/2}^{\mu + \omega/2} \frac{x dx}{\omega} = \mu, \quad (20.2)$$

а дисперсия (если использовать обозначение  $M(x) = \mu$ )

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{\mu - \omega/2}^{\mu + \omega/2} \frac{(x - \mu)^2 dx}{\omega} = \int_{\mu - \omega/2}^{\mu + \omega/2} \frac{x^2 dx}{\omega} - \mu^2 = \frac{\omega^2}{12}. \quad (20.3)$$

Площадь заштрихованной фигуры на рис. 5, т. е. величина  $\int f(x) dx = dx/\omega$ , равна вероятности того, что случайная величина  $\xi$ , имеющая прямоугольное распределение, лежит в интервале значений  $x \div x + dx$ .

Вероятность  $P_\alpha$  того, что случайная величина  $\xi$  лежит в интервале  $[\mu - \alpha\omega/2; \mu + \alpha\omega/2]$ , где положительное число  $\alpha \leq 1$ ,

равна, очевидно, площади прямоугольника со сторонами  $1/\omega$  и  $\alpha\omega$ , т. е.

$$P_{\alpha} = P(\mu - \alpha\omega/2 \leq \xi \leq \mu + \alpha\omega/2) = \alpha. \quad (20.4)$$

**20.2. Нормальное распределение.** Нормальное распределение, или распределение Гаусса, является предельной формой, в которую могут переходить многие другие виды функций распределения. Приблизительно нормальное распределение имеет случайная величина, характеризующая результат одновременного влияния большого числа случайных факторов, каждый из которых по своему влиянию не превышает заметным образом остальные.

Функция плотности нормального распределения имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (20.5)$$

где математическое ожидание

$$M(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \mu,$$

а дисперсия, если использовать  $M(x) = \mu$ ,

$$D(x) = M(x^2) - \mu^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx - \mu^2 = \sigma^2.$$

На рис. 6 изображены две функции плотности нормального распределения. Функция плотности  $f(x)$  в точке  $x = \mu$  имеет максимум, а точки  $\mu \pm \sigma$  являются точками перегиба. Изменение значения  $\mu$  вызывает только смещение кривой по оси абсцисс без изменения ее формы. Изменение величины  $\sigma$  вызывает изменение масштаба на обеих координатных осях. В одном масштабе кривая с меньшим  $\sigma$  уже кривой, для которой  $\sigma$  больше (см. рис. 6), что иллюстрирует смысл величины  $\sigma$  (см. § 19).

Площадь, заключенная между кривой плотности и осью абсцисс, равна единице (см. формулу (18.2)), т. е. вероятность  $P$  того, что случайная величина  $\xi$  имеет произвольное значение, равна единице. Вероятность  $P$  того, что случайная величина  $\xi$ , имеющая нормальное распределение, не отличается по модулю от своего математического ожидания  $\mu$  больше, чем на  $\lambda\sigma$ , где  $\lambda$  — некоторое положительное число, а  $\sigma$  — стандартное отклонение, равна, очевидно, площади под кривой плотности на интервале  $\mu \pm \lambda\sigma$  (см. § 18), т. е.

$$P_{\lambda} = P(\mu - \lambda\sigma \leq \xi \leq \mu + \lambda\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu - \lambda\sigma}^{\mu + \lambda\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx. \quad (20.6)$$

Очевидно, для каждой вероятности  $P_\alpha = \alpha$  можно определить такое число  $\lambda_\alpha$ , что интеграл в правой части соотношения (20.6) для этого значения  $\lambda_\alpha$  будет равен  $\alpha$ . Величину  $\alpha$  можно выражать в долях единицы или в процентах. В таблице I приложения Г приведены значения коэффициентов  $\lambda_\alpha$  для разных  $\alpha$ .

## § 21. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

Для оценки вероятности попадания случайной величины в заданный интервал выше мы использовали конкретный вид функции плотности (см. формулы (20.4) и (20.6)). Однако часто значительный интерес представляет возможность такой оценки без использования конкретного вида функции плотности вероятности (например, когда она неизвестна). Очевидно, что такая оценка возможна, если только имеется какая-то информация о случайной величине, например известны математическое ожидание и дисперсия. Если же нет никакой информации, то такая оценка невозможна. В случае известных значений  $\mu$  и  $\sigma^2$  П. Л. Чебышевым было получено следующее неравенство для оценки вероятности того, что случайная величина  $\xi$  не отличается от своего математического ожидания  $\mu$  на величину, большую  $\gamma\sigma$ , т. е. что она лежит внутри интервала  $\mu \pm \gamma\sigma$ , где  $\gamma$  — положительное число:

$$P(\mu - \gamma\sigma \leq \xi \leq \mu + \gamma\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\gamma^2}. \quad (21.1)$$

Для каждой вероятности  $P_\alpha = \alpha$  можно определить такое число  $\gamma_\alpha > 0$ , что будет выполняться неравенство (21.1). Из (21.1) очевидно, что

$$\gamma_\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}. \quad (21.2)$$

Из неравенства Чебышева (21.1) следует, что вероятность попадания случайной величины в интервал  $\mu \pm \gamma_\alpha\sigma$  не меньше  $\alpha$ , где  $\gamma_\alpha$  определяется формулой (21.2). Величину  $\alpha$  можно выражать в долях единицы или в процентах. В табл. III приложения Б приведены значения коэффициентов  $\gamma_\alpha$  для разных  $\alpha$ , вычисленные по формуле (21.2).

## § 22. НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. СВЕРТКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Если имеются случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ , то пару значений  $(\xi, \eta)$  можно рассматривать как составную случайную величину. Согласно § 18, вероятность того, что составная случайная величина лежит в двумерном интервале  $(x \div x + dx; y \div y + dy)$ , равна

$$P(x \leq \xi \leq x + dx; y \leq \eta \leq y + dy) = f(x, y) dx dy, \quad (22.1)$$

где  $f(x, y)$  — функция плотности составной случайной величины.

Говорят, что две случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, если



функция плотности составной случайной величины  $(\xi, \eta)$  имеет следующий вид:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y), \quad (22.2)$$

где  $f_1(x)$  — функция плотности случайной величины  $\xi$ , а  $f_2(y)$  — величины  $\eta$ . Аналогично (22.2) вводится условие независимости и большего числа случайных величин. В дальнейшем мы будем рассматривать только независимые случайные величины. Рассмотрим  $n$  независимых случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , каждая из которых характеризуется функцией плотности  $f_i(x_i)$ , математическим ожиданием  $\mu_i$  и дисперсией  $\sigma_i^2$ . Сумма всех этих случайных величин есть, очевидно, функция этих величин и тоже является случайной величиной. Обозначим эту сумму через  $\xi$ , т. е.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n. \quad (22.3)$$

Случайная величина  $\xi$  также будет характеризоваться какой-то функцией плотности  $f(x)$ , математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ . В случае суммы  $n$  независимых случайных величин имеют место следующие соотношения [12]:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n; \quad (22.4)$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2, \quad (22.5)$$

т. е. математическое ожидание  $\mu$  и дисперсия  $\sigma^2$  случайной величины  $\xi$  равны соответственно сумме математических ожиданий и сумме дисперсий слагаемых величин  $\xi_i$ . Функция плотности  $f(x)$  определяется всеми функциями  $f_i(x_i)$  [12]. В случае суммы двух случайных величин функция плотности определяется сверткой исходных функций плотности  $f_1$  и  $f_2$ , т. е. интегралом

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z) f_2(x-z) dz. \quad (22.6)$$

### § 23. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

В математической статистике большую роль играет распределение, называемое распределением Стьюдента, к которому можно прийти в следующем случае. Рассмотрим  $n+1$  случайных величин:  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , каждая из которых имеет функцию плотности вида (20.5), т. е. распределена по нормальному закону. Пусть математические ожидания всех этих случайных величин одинаковы и равны нулю, а дисперсии тоже одинаковы и равны  $\sigma^2$ . Рассмотрим следующую функцию этих случайных величин, которая тоже будет случайной величиной и которую мы обозначим через  $t$ :

$$t = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2}}. \quad (23.1)$$

Случайная величина  $t$  имеет распределение, называемое распределением Стьюдента. Функция плотности этого распределения зависит от параметра  $n$  и имеет следующий вид:

$$s_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (23.2)$$

где гамма-функция

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} \exp(-x) dx. \quad (23.3)$$

В случае положительных  $n$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (23.3')$$

Математическое ожидание величины  $t$  в этом случае равно  $\mu=0$ , а дисперсия  $\sigma^2=n/(n-2)$ .

На рис. 5 пунктирная кривая 2 изображает функцию плотности распределения Стьюдента для  $n=3$ ,  $\mu=0$  и  $\sigma=\sqrt{3}$ . Для больших значений  $n$  функция плотности  $s_n(x)$  мало отличается от функции плотности нормального распределения. При  $n \rightarrow \infty$  предельным выражением  $s_n(x)$  является плотность нормального распределения, а для малых  $n$  кривая плотности  $s_n(x)$  шире кривой для нормального распределения с дисперсией, равной единице (см. рис. 5, кривые 2 и 1).

Для каждой вероятности  $P_\alpha = \alpha$  можно найти такое число  $t_{\alpha, n}$ , называемое коэффициентом Стьюдента, что случайная величина  $t$ , имеющая распределение Стьюдента, не будет отличаться по модулю от своего математического ожидания  $\mu$  больше, чем на  $t_{\alpha, n}$ , т. е.  $t_{\alpha, n}$  можно определить из следующего соотношения (см. § 18):

$$P_\alpha = P(\mu - t_{\alpha, n} \leq t \leq \mu + t_{\alpha, n}) = \int_{\mu - t_{\alpha, n}}^{\mu + t_{\alpha, n}} s_n(x) dx = \alpha. \quad (23.4)$$

Величина  $\alpha$  выражается либо в долях единицы, либо в процентах. Значения коэффициентов  $t_{\alpha, n}$  для разных  $\alpha$  и  $n$  приведены в табл. II приложения Б.

НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОНЯТИЯ  
И ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

## § 24. ПОНЯТИЕ О ВЫБОРКЕ

Предположим, что нужно измерить некоторую величину  $l_0$ , например длину стержня. Можно выполнить одно измерение, два, три и т. д. Так как в результате каждого измерения получается некоторое число, то в итоге реализуется некоторый набор чисел  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Возникает вопрос: какое из полученных чисел или какую функцию этих чисел следует принять за значение величины  $l_0$ ?

Результат произвольного измерения из-за влияния разных погрешностей измерений (см. § 4) является случайной величиной  $\xi$  (см. § 16), которая имеет некоторую функцию распределения. Если бы мы знали эту функцию распределения, то мы могли бы условиться принимать за значение величины  $l_0$  «центр функции плотности случайной величины  $\xi$ , например математическое ожидание (см. § 19). Однако в реальных условиях эксперимента функция распределения, как правило, не известна. В лучшем случае можно только догадываться о виде функции распределения. Например, могут быть основания предполагать, что  $\xi$  имеет нормальное распределение, но параметры нормального распределения  $\mu$  и  $\sigma$  (см. § 20.2) при этом, как правило, все равно не известны.

Если бы мы могли проводить измерения неограниченное число раз, то в результате получили бы бесконечный набор чисел  $x_1, x_2, \dots$ , который образовал бы множество (бесконечное) всех возможных значений величины  $\xi$ . В этом случае для любого интервала  $x \div x + dx$  мы могли бы определить частоту и вероятность (см. § 17) того, что случайная величина заключена в этом интервале, т. е. определили бы функцию плотности (см. § 18), а следовательно, и математическое ожидание.

В реальных условиях число измерений конечно. В этом случае из бесконечного множества возможных значений величины  $\xi$  мы располагаем только несколькими случайно выбранными значениями этой величины. Если проделано  $n$  измерений (т. е. некоторый эксперимент независимо повторен  $n$  раз (см. § 16), то мы имеем  $n$  значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые будем называть случайной выборкой объема  $n$  из множества всех возможных значений величины  $\xi$ . В математической статистике (см. [12], гл. 27) показывается, что по результатам каждой выборки  $x_1,$

$x_2, \dots, x_n$  можно оценить величины математического ожидания  $\mu$  и дисперсии  $\sigma^2$  распределения величины  $\xi$ .

## § 25. ВЫБОРОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

По определению выборочное среднее значение случайной величины  $\xi$ , которое обозначается как  $\bar{x}$ , равно

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (25.1)$$

а выборочная дисперсия  $s^2$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (25.2)$$

Очевидно, что  $\bar{x}$  и  $s^2$  — случайные величины, поскольку определяются по случайной выборке объема  $n$ , а не по функции плотности, как математическое ожидание или дисперсия. Если имеется ряд выборок объема  $n$ , то соответственно имеется и ряд значений  $\bar{x}$  и  $s^2$ . Как и всякая случайная величина, каждая из величин  $\bar{x}$  и  $s^2$  характеризуется какой-то своей функцией плотности, а также математическим ожиданием и дисперсией. Пусть математическое ожидание и дисперсия случайной величины  $\xi$  равны соответственно  $\mu$  и  $\sigma^2$ . В математической статистике показывается (см. [12], гл. 27), что математическое ожидание и дисперсия случайной величины  $\bar{x}$  определяются следующими формулами (см. Приложение А):

$$M(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu; \quad (25.3)$$

$$D(\bar{x}) = M((\bar{x} - \mu)^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(x_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (25.4)$$

Из (25.3) и (25.4) следует, что математическое ожидание случайной величины  $\bar{x}$  равно  $\mu$ , а стандартное отклонение равно  $\sigma/\sqrt{n}$ , которое становится очень малой величиной при больших объемах выборки  $n$ . Поэтому на основании неравенства Чебышева (см. § 21) можно утверждать, что при достаточно больших  $n$  случайная величина  $\bar{x}$  будет как угодно мало (в статическом смысле (см. § 17)) отличаться от математического ожидания  $\mu$ . Это и является основанием для выбора величины  $\bar{x}$ , определяемой по формуле (25.1) в качестве оценки значения  $\mu$ . Однако эта оценка удовлетворительна, если только случайная величина  $\xi$  распределена по нормальному закону (или на ограниченном интервале значений, как, например, в случае прямоугольного распределе-

ния). Если функция плотности асимметрична (например, имеет длинный «хвост» с одной стороны), то «центр» группирования случайных величин лучше определяет медиана, ее оценка  $\bar{x}_{1/2}$  определяется как значение абсциссы, слева и справа от которого реализуется по половине всей выборки. Кроме того, математическое ожидание в некоторых случаях может вообще не существовать. В практике физических измерений используется почти исключительно величина  $\bar{x}$ . Однако оценка медианы  $\bar{x}_{1/2}$  в некоторых случаях является более предпочтительной величиной, так как по заданной выборке оценивается с большой точностью [13]. Рассмотрим теперь математическое ожидание случайной величины  $s^2$ . Оно определяется формулой

$$M(s^2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n M((x_i - \bar{x})^2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \right) = \sigma^2, \quad (25.5)$$

т. е. среднее значение случайной величины  $s^2$  равно  $\sigma^2$ . Дисперсия же  $s^2$  выражается довольно сложным образом. Однако если величина  $\xi$  имеет нормальное распределение, то дисперсия величины  $s^2$  выражается простой формулой

$$D(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n}, \quad (25.6)$$

т. е. стандартное отклонение  $\sqrt{2}\sigma^2/\sqrt{n}$  может быть как угодно малым при больших объемах выборки. В общем случае формула для дисперсии  $s^2$  громоздка, однако и в этом случае из-за  $n$  в знаменателе следует аналогичный вывод о величине стандартного отклонения при больших  $n$ . Поэтому, используя как и выше, неравенство Чебышева, можно утверждать, что при достаточно больших  $n$  случайная величина  $s^2$  будет как угодно мало (в статистическом смысле) отличаться от математического ожидания  $\sigma^2$ . Это и является основанием для выбора величины  $s^2$ , определяемой формулой (25.2) в качестве оценки значения  $\sigma^2$ .

Если в качестве оценки величины  $\sigma^2$  использовать  $s^2$ , то для оценки стандартного отклонения величины  $\bar{x}$ , которую обозначим как  $s_{\bar{x}}$ , мы будем иметь формулу (см. (25.2) и (25.4))

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (25.7)$$

Формулы (25.1) и (25.7) позволяют ответить на поставленный в начале параграфа § 24 вопрос. Используя результаты выборки  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , можно по формуле (25.7) вычислить оценку математического ожидания  $\mu$ , т. е. величину  $\bar{x}$ , а по формуле (25.7) — выборочное стандартное отклонение этой оценки, которая позволяет судить о том, как сильно величина  $\bar{x}$  может отличаться от математического ожидания  $\mu$ .

Математическое ожидание величины  $\bar{x}$  равно  $\mu$ , а дисперсия определяется формулой (25.4). Что касается функции распределения величины  $\bar{x}$ , то она, как правило, не известна. В частном случае, если величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$  (см. § 20.2), то выборочное среднее  $\bar{x}$  также будет иметь нормальное распределение с математическим ожиданием  $\mu$  и с дисперсией  $\sigma^2/n$  [12].

## § 26. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ. КРИТЕРИЙ ЗНАЧИМОСТИ. КОЭФФИЦИЕНТ ДОВЕРИЯ (НАДЕЖНОСТИ)

В результате измерений некоторой величины можно найти оценку значения  $\mu$ , вычислив  $\bar{x}$  по формуле (25.1). Такая оценка называется точечной. Знание одной только точечной оценки не дает достаточно полного представления о величине  $\mu$ . Если еще вычислить  $s_x$  по формуле (25.7), то появятся основания предполагать, как сильно величина  $\bar{x}$  может отличаться от  $\mu$ . Однако предпочтительнее более точная, количественная характеристика того, как сильно  $\bar{x}$  может отличаться от  $\mu$ . Такой характеристикой может служить интервал, для которого известно, с какой вероятностью значение  $\mu$  может находиться внутри этого интервала.

Из имеющихся в нашем распоряжении величин  $\bar{x}$  и  $s_x$  (или  $\bar{x}$  и  $\sigma_x$ ) можно построить интервал

$$\bar{x} \pm K_{\alpha} s_x, \quad (26.1)$$

где  $K_{\alpha}$  — положительное число, зависящее от параметра  $\alpha$ . Назовем статистической гипотезой утверждение о том, что неизвестное значение  $\mu$  заключено внутри интервала (26.1). Возникает вопрос, на основании какого критерия можно сделать заключение о справедливости или об ошибочности этой гипотезы?

Допустим, нам удалось вычислить, что вероятность того, что  $\mu$  заключено внутри интервала (26.1), равна  $\alpha$ . Выберем произвольно некоторое число  $\alpha_0 = 1 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малое положительное число. Тогда в качестве критерия можно использовать следующее неравенство:

$$\alpha \geq \alpha_0. \quad (26.2)$$

Если неравенство (26.2) выполняется, то мы должны принять гипотезу, а если нет, то отвергнуть.

Критерий (26.2) называется критерием значимости гипотезы, а число  $\alpha_0$ , которое выступает в роли предельной вероятности, называется уровнем значимости критерия. Величины  $\alpha$  и  $\alpha_0$  можно выражать в долях единицы или в процентах. Если величина  $\alpha_0$  выражена в процентах, то она называется  $\alpha_0$ -процентным уровнем значимости. Величину  $\alpha_0$  называют также коэффициентом доверия (надежности), или просто вероятностью, а интервал (26.1) — доверительным интервалом.

Конкретные значения  $\alpha_0$  выбираются из следующих соображений. Во-первых, естественно, чем больше  $\alpha_0$ , тем более сильное утверждение делается о величине  $\mu$ , к чему и надо стремиться. Однако, с другой стороны, если при этом длина интервала (26.1) становится слишком большой, то может потеряться представление даже о порядке величины  $\mu$ . Поэтому в условиях работы в лабораториях физического практикума разумно выбирать  $\alpha_0$  из условия

$$K_{\alpha_0} \cdot \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \leq 0,1. \quad (26.3)$$

Нужно заметить, что вывод о том, верна или нет рассматриваемая гипотеза, носит статистический характер. Это значит, что в случае, если мы принимаем гипотезу на основании критерия (26.2), то это не означает безусловной справедливости гипотезы. Это только означает следующее. Допустим, что много раз проделана серия из  $n$  измерений и для каждой серии вычислены  $\bar{x}$  и  $s_{\bar{x}}$  и построили интервал (26.1), используя число  $K_{\alpha_0}$ . Тогда величина  $\mu$  оказалась бы внутри лишь некоторой части всех построенных интервалов, приблизительно равной  $\alpha_0$  от их полного количества. Иными словами, рассматриваемая гипотеза будет выполняться (в среднем) в  $\alpha_0$  проценте случаев. Если  $\alpha_0$  достаточно близка к единице, то это будет практически достоверным событием (см. § 17). Но в  $\varepsilon = 1 - \alpha_0$  проценте случаев гипотеза не будет выполняться, т.е. с вероятностью  $\varepsilon = 1 - \alpha_0$  она может быть и не верной. Однако, если  $\varepsilon$  мало, то это будет практически недостоверным событием (см. § 17). И наоборот, если гипотеза отвергается на основании критерия (26.2), то это не означает, что гипотеза просто не верна. Это только означает, что если в  $\varepsilon = 1 - \alpha$  проценте случаев (где  $\varepsilon$  не очень мало, так как  $\alpha < \alpha_0$ ) гипотеза не будет выполняться.

## § 27. ПОСТРОЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Покажем теперь, как можно для заданной вероятности  $P_{\alpha_0} = \alpha_0$  построить интервал (26.1), т.е. определить число  $K_{\alpha_0}$ . Величина  $\mu$  может находиться внутри этого интервала с вероятностью  $P_{\alpha_0} = \alpha_0$ . Рассмотрим различные возможные случаи.

**27.1. Использование известного закона для функции плотности и заданной дисперсии.** Пусть для случайной величины  $\bar{x}$  известен закон функции плотности  $f(\bar{x})$  и задана дисперсия  $\sigma^2/n$ . Вероятность  $\alpha$  того, что значение  $\bar{x}$  не отличается по модулю от своего математического ожидания  $\mu$  более, чем на  $K_{\alpha}\sigma/\sqrt{n}$ , равна, очевидно, площади под кривой плотности на интервале  $\mu \pm K_{\alpha}\sigma/\sqrt{n}$  (см. § 20):

$$P_{\alpha} (|\mu - \bar{x}| \leq K_{\alpha}\sigma/\sqrt{n}) = \int_{\mu - K_{\alpha}\sigma/\sqrt{n}}^{\mu + K_{\alpha}\sigma/\sqrt{n}} f(\bar{x}) d\bar{x} = \alpha. \quad (27.1)$$

Из соотношения (27.1) для заданного значения  $\alpha$  можно определить  $K_\alpha$ .

С другой стороны, выражение для этой вероятности  $P_\alpha$  можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} P_\alpha (|\mu - \bar{x}| \leq K_\alpha \sigma / \sqrt{n}) &= P_\alpha (-K_\alpha \sigma / \sqrt{n} \leq \mu - \bar{x} \leq K_\alpha \sigma / \sqrt{n}) = \\ &= P_\alpha (\bar{x} - K_\alpha \sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + K_\alpha \sigma / \sqrt{n}), \end{aligned} \quad (27.2)$$

т. е. мы получили для величины  $\mu$  следующий интервал, соответствующий коэффициенту доверия  $\alpha$ :

$$\bar{x} - K_\alpha \sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + K_\alpha \sigma / \sqrt{n}. \quad (27.3)$$

Полученное соотношение (27.3) вместе с условием (27.1) для определения  $K_\alpha$  решает поставленную задачу определения интервала для рассматриваемого случая. Следует заметить, что вычисление коэффициентов  $K_\alpha$  не зависит от конкретного значения  $\mu$  и может быть проделано раз и навсегда для заданного закона распределения. Очевидно, что для известного закона распределения можно заранее задать набор коэффициентов  $K_\alpha$  и затем по формуле (27.1) рассчитать соответствующий ряд значений  $\alpha$ . Построенной таким образом таблицей значений  $\alpha$  и  $K_\alpha$  можно пользоваться для вычислений интервала (27.3).

**Пример.** Пусть извлечена выборка объема  $n$  (см. § 24) из нормального распределения с известным значением дисперсии  $\sigma^2$ . Тогда величина  $\bar{x}$  также будет распределена по нормальному закону с дисперсией  $\sigma^2/n$ . В этом случае (см. соотношения (20.6) и (27.1)) коэффициент  $K_\alpha$  совпадает с  $\lambda_\alpha$ , т. е. для заданного  $\alpha$  имеем  $K_\alpha = \lambda_\alpha$  (см. § 20.2). Если  $\alpha = 95\%$ , то из табл. I приложения Б находим значение  $\lambda_\alpha = 2$  и получаем для величины  $\mu$  следующий интервал, соответствующий коэффициенту доверия  $\alpha_0 = 95\%$ :

$$\bar{x} - 2\sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + 2\sigma / \sqrt{n}. \quad (27.4)$$

Если, например, известно, что  $\sigma^2 = 0,25$  и  $n = 25$  и вычисления по формуле (25.1) дали  $\bar{x} = 5,0$ , то из (27.4) определяем интервал для оценки значения  $\mu$ , который условимся записать в виде

$$\mu = 5,0 \pm 0,2; \text{ коэффициент доверия } \alpha_0 = 0,95.$$

**Пример.** Пусть производится считывание со шкалы измерительного прибора или просто округляется некоторое число. Результат этих операций — случайная величина с прямоугольным распределением (см. § 20.1). Если известна цена деления прибора  $\omega$  (в случае округления значение  $\omega$  обычно равно одной единице последнего значащего разряда), то  $\sigma = \omega / \sqrt{12}$  (см. формулу (20.3)). В этом случае для заданной вероятности  $\alpha$  находим, переписав формулу (20.4) в виде, аналогичном (27.2), что  $K_\alpha = \alpha$ , а интервал для оценки  $\mu$  имеет вид

$$x - \alpha\omega / \sqrt{12} \leq \mu \leq x + \alpha\omega / \sqrt{12}. \quad (27.5)$$



Если, например, отсчет  $x=12,7$ , цена деления  $\omega=0,1$ ;  $\alpha_0=0,8$ , то (27.5) определяет следующий интервал для оценки  $\mu$ :

$$\mu=12,7 \pm 0,02; \text{ коэффициент доверия } \alpha_0=0,8.$$

**27.2. Применение распределения Стьюдента.** Пусть величина  $x$  а, следовательно, и  $\bar{x}$  распределены по нормальному закону. В данном случае в отличие от рассмотренного в § 27.1 конкретизируется закон распределения, а именно задается нормальный закон, но не задается величина дисперсии  $\sigma^2$  и поэтому необходимо пользоваться оценкой стандартного отклонения  $s_x$  согласно (20.7). Рассмотрим следующее отношение, которое обозначим через  $t$ :

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)}{s_x}. \quad (27.6)$$

Перепишем выражение для  $t$  в виде (используя выражение 20.2)

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s_x^2}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sqrt{\frac{n}{n-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)}}. \quad (27.6a)$$

Можно доказать (см., например, [12]), что числитель и знаменатель в (27.6a) независимы. Так как величина  $\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)$  в числителе распределена по нормальному закону (см. § 25) со средним значением 0 и дисперсией  $\sigma^2$ , а в знаменателе стоит корень квадратный из среднего арифметического суммы квадратов  $(n-1)$  величин с тем же законом распределения\*, то согласно § 23 величина  $t$  имеет распределение Стьюдента с параметром  $n-1$ . Поэтому, переписывая формулу (23.4) в виде, аналогичном (27.2), находим следующий интервал для оценки  $\mu$ , который характеризуется заданной достоверностью  $\alpha$ :

$$\bar{x} - t_{\alpha, n-1} \cdot s_x \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha, n-1} \cdot s_x. \quad (27.7)$$

Значения  $\bar{x}$  и  $s_x$  рассчитываются из результатов измерений, а коэффициент  $t_{\alpha, n-1}$  для заданной надежности  $\alpha_0$  и числа измерений  $n$  находится по таблицам II приложения Б.

**Пример.** Пусть извлечена выборка объема  $n=4$  из нормального распределения и по формуле (25.1) вычислено, что  $\bar{x}=2,1$ , а по формуле (25.7) рассчитано значение  $s_x=0,05$ . Тогда для  $\alpha_0=0,8$  и параметра  $n-1=3$  находим по табл. II приложения Б значе-

---

\*  $n$  величин  $(x_i - \bar{x})$  связаны одним соотношением  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ . Мож-

но перейти к  $(n-1)$  новым независимым переменным, которые будут распределены по нормальному закону с математическим ожиданием  $\mu=0$  и дисперсией  $\sigma^2$  (подробнее см. [12]).

ние коэффициента  $t_{\alpha_0, n-1} = 1.6$ . Для оценки  $\mu$  в этом случае из (27.7) получаем следующий интервал:

$$\mu = 2,10 \pm 0,08, \text{ коэффициент доверия } \alpha_0 = 0,8.$$

**27.3. Использование неравенства Чебышева.** Если функция плотности для случайной величины  $\bar{x}$  неизвестна, но дисперсия  $\sigma_x^2$  задана, то интервал для оценки  $\mu$  можно рассчитывать, воспользовавшись неравенством Чебышева (см. § 21)

$$\bar{x} - \gamma_{\alpha_0} \sigma_x \leq \mu \leq \bar{x} + \gamma_{\alpha_0} \sigma_x; \text{ коэффициент доверия } \alpha \geq \alpha_0, \quad (27.8)$$

где  $\gamma_{\alpha_0}$  определяется формулой (21.2). Вероятность того, что математическое ожидание  $\mu$  будет заключено внутри интервала (27.8) не меньше  $\alpha_0$ .

**Пример.** Пусть, например, известно, что  $\sigma_x^2 = 0,16$  и вычисления по формуле (25.1) дали  $\bar{x} = 9,2$ . Из таблицы III приложения Б для  $\alpha_0 = 0,8$  находим  $\gamma_{\alpha_0} = 2,2$ . Тогда для оценки  $\mu$  из (27.8) можно рассчитать следующий интервал:

$$\mu = 9,20 \pm 0,88, \text{ коэффициент доверия } \alpha_0 \geq 0,8.$$

**27.4. Ориентировочные интервалы.** Если функция плотности или дисперсия случайной величины неизвестны, то по заданной выборке нельзя построить доверительного интервала для оценки математического ожидания  $\mu$ , так как нет строгих методов, которые позволили бы для заданного интервала (26.1) рассчитать величину  $\alpha$  или по крайней мере получить неравенство для этой величины. Аналогично для заданного  $\alpha$  нет методов вычисления коэффициентов  $K_\alpha$ .

Однако, если объем выборки  $n$  настолько велик, что оценка стандартного отклонения для величины  $s^2$  не превышает 40% от математического ожидания  $M(s^2)$ , то можно построить ориентировочный интервал, используя неравенство Чебышева для оценки  $\alpha$  и величину  $s_x$  вместо  $\sigma_x$ .

$$\bar{x} - \gamma_\alpha s_x \leq \mu \leq \bar{x} + \gamma_\alpha s_x, \text{ ориентировочно коэффициент доверия } \sim \alpha \quad (27.9)$$

Коэффициент доверия в этом случае лишь ориентировочно равен  $\alpha$ , т. е. может быть несколько больше или несколько меньше. Поэтому интервал (27.9) имеет смысл вычислять только для ориентировки. При вычислении интервалов типа (27.9) не следует использовать значения  $\alpha$ , близкие единице, так как в этом случае ошибка в величине интервала особенно велика. Разумно использовать значения  $\alpha$  около  $0,5 \div 0,7$ .

Как следует из (25.6), в случае нормального распределения стандартное отклонение для  $s^2$  не превышает 40% от математиче-

ского ожидания  $M(s^2)$  в случае выборки объема  $n$ , где  $n$  удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{\frac{2}{n}} \leq 0,4, \quad (27.10)$$

откуда  $n \geq 13$ . Если распределение неизвестно, то объем выборки должен превышать это значение. Если же объем выборки  $n \geq 10$ , то вычислять ориентировочный интервал вряд ли имеет смысл. Лучше привести выборочные характеристики  $\bar{x}$  и  $s_x$  и объем выборки  $n$ .

# ВОПРОСЫ АНАЛИЗА И ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

## § 28. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В процессе измерения мы получаем величины, которые не являются значениями интересующих нас параметров объекта. Дело в том, что

- а) процесс измерения всегда сопровождается погрешностью;
- б) как правило, доступны измерению не те параметры, которые нам нужны, а другие, связанные с первыми зависимостью, причем известной лишь приближенно. Это последнее обстоятельство может определяться природой явления, а может быть связано с техникой измерения (прибором). Например, при так называемом дистанционном измерении температуры тела мы вынуждены довольствоваться измерением электромагнитного излучения, лишь косвенно связанного с его температурой, причем эта связь обычно известна приближенно. Такая ситуация характерна для спутниковых измерений температуры поверхности океана, для измерения температуры плазмы и т. д. В других случаях сам сигнал разрушается измерительным прибором: например, оптическое изображение «размывается» из-за явления дифракции и несовершенства оптической системы.

Наконец, измерительный прибор возмущает измеряемый объект и регистрирует параметры возмущенного объекта, в то время как нас интересуют параметры объекта в невозмущенном состоянии.

Если ограничиться аддитивной погрешностью, то схему измерения можно записать в виде.

$$\xi_i = a_i(f) + v_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

или в векторной форме

$$\xi = a(f) + v. \quad (28.1)$$

При  $i$ -м измерении сигнал от объекта  $f$  поступает на вход прибора, преобразуется в сигнал  $a_i(f)$  и регистрируется в виде числа  $\xi_i$  вместе с ошибкой  $v_i$ . Наша цель — зная  $\xi$ , нужно возможно более точно определить параметры объекта, которые связаны с сигналом  $f$  известной зависимостью  $u_1(f), \dots, u_s(f)$  \*. Поскольку

---

\* Предполагается, что математическая модель, связывающая сигнал  $f$  с параметрами объекта, известна.

вся эта информация должна извлекаться из  $\xi$ , то в общем случае это будут функции  $r_1(\xi), \dots, r_s(\xi)$ .

Задача заключается в том, чтобы найти такие функции  $r_1(\xi), \dots, r_s(\xi)$  (векторную функцию  $\mathbf{r}(\xi)$ ), которые были бы в совокупности как можно более близки к истинным значениям параметров объекта  $u_1(f), \dots, u_s(f)$  (соответственно к вектору  $\mathbf{u}(f)$ ). Наиболее распространен, хотя он и не единственный, способ оценивать близость векторов по квадрату нормы их разности.

Таким образом, метод обработки измерений вытекает из определенного принципа оптимальности. Однако то, как реализуется этот принцип, определяется тем, что известно относительно схемы измерения (28.1) от ее математической модели.

Если о погрешности неизвестно ничего, т. е.  $\mathbf{v}$  может быть априори произвольным вектором, то задача не может быть решена. Как правило, сведения о  $\mathbf{v}$  могут быть даны либо в форме оценок (ограничений), либо в вероятностных терминах, в предположении, что  $\mathbf{v}$  — случайный вектор.

Пусть известна оценка для  $\mathbf{v}$  (например,  $\|\mathbf{v}\|^2 < \delta$  или  $\max_i |\mathbf{v}_i| < \delta$ ). Это значит, что задано множество значений вектора  $\mathbf{v}$ , каждое из которых можно считать истинной ошибкой с равным основанием. Предположим, что уравнение  $\xi = \mathbf{a}(f)$ , где  $\xi = \mathbf{a}(f_0) + \mathbf{v}$ , для каждого  $\mathbf{v}$  из указанного множества имеет единственное решение. В этом случае множество значений  $\mathbf{v}$  порождает множество  $\{f\}$  решений  $f$ , в котором содержится истинное значение  $f = f_0$ , последнее в свою очередь порождает множество  $\{\mathbf{u}(f)\}$  значений параметров объекта  $\mathbf{u}(f)$ . Если множество  $\{\mathbf{u}(f)\}$  ограничено, то его можно использовать для интерпретации измерений, в противном случае  $\{\mathbf{u}(f)\}$  не имеет физического смысла и мы имеем дело с так называемой некорректной задачей. Способы решения таких задач основаны на введении дополнительной информации о решении («априорной информации»), которая либо имеет вид ограничений, т. е. указывает что  $f$  должно принадлежать некоторому («априорному») множеству\*, либо на множестве решений вводится функция предпочтения, которая может носить характер декларации\*\*, а может быть задана законом распределения (вероятности)  $f$ . Учет априорной информации при решении задачи (28.1) называется регуляризацией в широком смысле. Методы регуляризации, основанные на априорно принятых предпочтениях типа гладкости, величины нормы и др., развиты в работах А. Н. Тихонова и его учеников.

Если предположить, что погрешность  $\mathbf{v}$  — случайная величина с известным распределением, то условие типа  $\|\mathbf{v}\|^2 < \delta$  будет носить вероятностный характер, а множество решений задачи (28.1) образует так называемое оценивающее множество, содержащее с заданной вероятностью истинное значение  $f = f_0$ . Его размер зависит от задаваемого параметра — вероятности оценивания. В оце-

\* При этом множество не обязательно ограничено.

\*\* Например,  $f_1$  предпочтительнее  $f_2$ , если  $\|f_1\| < \|f_2\|$ .

нивающим множестве можно выбрать точку  $\hat{f} = t(\xi)$ , которая обладает некоторыми оптимальными статистическими свойствами, и принять ее за решение («точечная оценка»  $f$ ). Способы построения оценок и оценивающих множеств, а также их свойства изучает раздел математической статистики — теория статистических оценок. Принципом построения статистических оценок для рассматриваемой задачи может быть минимизация средней ошибки. В этом случае математическая задача заключается в том, чтобы найти функцию  $r_1(\xi), \dots, r_s(\xi)$ , для которых минимально средне-квадратичное отклонение  $\mathbf{r}(\xi)$  от  $\mathbf{u}(f)$ :

$$\sup_f \mathbf{E} \|\mathbf{r}(\xi) - \mathbf{u}(f)\|^2 \sim \min_{r(\cdot)} \quad (28.2)$$

Буквой  $\mathbf{E}$  обозначено математическое ожидание, т. е. усреднение по всем реализациям случайной величины  $\xi$  (или  $\mathbf{v}$ ). Для решения задачи (28.2) необходима математическая модель: должны быть известны функции  $a(\cdot)$ ,  $u(\cdot)$ , статистические свойства погрешности  $\mathbf{v}$  и задано множество, априори содержащее  $f_0^*$ . Эти зависимости могут быть заданы в неявной форме, в виде математической задачи, решение которой может быть получено численно и т. д. Задача (28.2) относится к области математической статистики, известной как анализ регрессий.

В настоящее время среди физиков широко распространены метод наименьших квадратов и тесно с ним связанный метод максимального правдоподобия. В принятых обозначениях метод наименьших квадратов сводится к минимизации квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i - a_i(f))^2 \sim \min_f \quad (28.3)$$

Значение  $f = \hat{f}$ , при котором достигается минимум в (28.3), используется в дальнейшем: в качестве искомым параметров рассматривается  $\mathbf{u}(\hat{f})$ . В некоторых случаях этот метод обладает оптимальными свойствами в смысле (28.2), но априори это ниоткуда не следует.

В методе максимального правдоподобия измерение  $\xi$  рассматривается как случайный вектор с известным (чаще всего нормальным) распределением, зависящим от неизвестного параметра  $f$ . Оценка параметра  $\hat{f}$  находится как такое его значение, при котором наиболее вероятно получить данную реализацию случайного вектора  $\xi$ . Этот критерий выбора  $f$  не связан явно с какими-либо свойствами оптимальности, в частности не ясна его связь с критерием (28.2), хотя конечные формулы для оценок параметров в ряде случаев совпадают для всех трех критериев.

Метод получения  $\mathbf{r}(\xi)$  параметров объекта  $\mathbf{u}(f)$ , который непосредственно вытекает из условия оптимальности (28.2) с учетом статистических свойств погрешности  $\mathbf{v}$ , мы будем называть

---

\* Это множество может совпадать со всем пространством.

**методом редукции измерений** (от лат. *reductio* — восстановление). Формальная сторона теории достаточно полно разработана для линейных задач, в которых функции  $a(\cdot)$ ,  $u(\cdot)$  и  $r(\cdot)$  являются матрицами (линейными операторами), обозначаемыми  $A$ ,  $U$  и  $R$  соответственно.

Метод редукции основан на определении оператора  $R$  и последующем преобразовании измерения  $\xi$  к виду

$$R\xi = RAf + Rv,$$

согласно которому  $R\xi$  — искаженный погрешностью  $Rv$  сигнал, полученный на выходе прибора  $RA$ , на вход которого подан сигнал  $f$ . Если  $R$  удовлетворяет условиям

$$RA = U, \quad E \|Rv\|^2 \sim \min, \quad (28.4)$$

то  $R\xi$  интерпретируется как выходной сигнал прибора  $U$ , равный параметрам измеряемого объекта с точностью до слагаемого  $Rv$ , определяющего ошибку такой интерпретации. Метод редукции допускает и инструментальную трактовку, когда принцип оптимальности применяется не к сигналу, а к прибору. Например, нужно найти такой оператор  $R$ , чтобы прибор  $RA$  был наиболее близок к  $U$  при некотором ограничении на погрешность  $Rv$ :

$$\|RA - U\| \sim \min, \quad E \|Rv\|^2 \leq \varepsilon. \quad (28.5)$$

В отличие от задачи (28.4), которую можно понимать как задачу оптимального синтеза выходного сигнала прибора  $r(\xi)$ , задачу (28.5) следует понимать как задачу оптимального синтеза идеального прибора  $U$ , на выходе которого исследователь получает значение параметров объекта.

## § 29. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ МЕТОДА РЕДУКЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Обозначим через  $f$  сигнал, поступающий от объекта и среды на вход измерительного прибора  $A$ ,  $v$  — случайную ошибку измерения (шум). В процессе измерения сигнал  $f$  разрушается двумя преобразованиями:  $f \rightarrow A(f) \rightarrow A(f) + v = \xi$ . Обозначение  $\xi$  примем для сигнала, полученного на выходе измерительного прибора. В дальнейшем преобразование, даваемое прибором, будем считать линейным и записывать в виде  $Af$ , а ошибку  $v$  — чисто случайной со средним значением, равным нулю (это означает, что систематическая ошибка либо отсутствует, либо уже учтена). В математической форме это преобразование запишем в виде

$$\xi = Af + v. \quad (29.1)$$

Как правило, математическая модель измерительного прибора — интегральное преобразование вида

$$(Af)(x) = \int a(x, y) f(y) dy. \quad (29.2)$$

Однако в реальном эксперименте измеряется конечное число значений, например,

$$(Af)(x_i) = \int a(x_i, y) f(y) dy, \quad i = 1, \dots, n,$$

соответственно с ошибками  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а поскольку и интеграл вычисляется приближенно, равенство (29.2) преобразуется в алгебраическую форму

$$(Af)_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} f_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (29.3)$$

Поэтому будем считать, что в равенстве (23.1), далее называемом схемой измерений,  $f \in R_m$ ,  $\xi$ ,  $Af$ ,  $v \in R_n$ , или иначе говоря,

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T, \quad v = (v_1, \dots, v_n)^T, \quad f = (f_1, \dots, f_m)^T, \quad A = (a_{ij})_n^m;$$

$R_n$ ,  $R_m$  — соответственно  $n$ - и  $m$ -мерные евклидовы пространства.

Задача редукции измерения состояния объекта, выполненного на приборе  $A$  по схеме (29.1), сводится к определению оператора  $R$ , такого, что  $R\xi$  можно интерпретировать как наиболее точное приближение для значений параметров состояния объекта. В процессе измерения как объект, так и среда, в которой находится объект и измерительный прибор, оказываются в той или иной степени возмущенными. Поскольку исследователя интересуют значения параметров объекта, свойственные невозмущенной системе «объект—среда», или, иначе говоря, значения параметров объекта в естественном состоянии,  $R\xi$  должно быть наилучшим приближением именно этих значений параметров, а не тех, которые характеризуют объект в процессе измерения.

Обозначим  $U$  оператор, описывающий гипотетический измерительный прибор, взаимодействующий при измерении с объектом и средой так же, как  $A$ , но дающий на выходе значения параметров объекта в естественном состоянии. Поскольку на вход  $U$  поступает тот же сигнал  $f$  от объекта и среды, что и в схеме (29.1), то  $Uf$  — значения параметров объекта в естественном состоянии. Оператор  $U$  моделирует то, что в экспериментальных исследованиях называется идеальным прибором.

Из самой постановки проблемы ясно, что, найдя оптимальное преобразование  $R$ , мы в максимальной степени скомпенсируем искажающее влияние прибора  $A$  и шума  $v$ . Следует особо подчеркнуть, что, как правило, прибор  $U$  физически не реализуем, однако его можно синтезировать на измерительно-вычислительной системе, вычисляя оператор  $R$ .

Для определения оператора редукции необходима сквозная математическая модель, связывающая параметры объекта с  $\xi$ , т. е. модель взаимодействия в системе «объект—среда—прибор», модель измерительного прибора, взаимодействующего с объектом и средой, модель шума и т.д. Для реализации вычисления оператора  $R$  предполагается наличие вычислителя (ЭВМ), причем с



инструментальной точки зрения измерительный прибор и вычислитель с должным математическим обеспечением, объединенные в измерительно-вычислительную систему (ИВС), можно трактовать как новый прибор со свойствами, максимально приближающимися к идеальному прибору  $U$ . Здесь уместно отметить, что требования к измерительному прибору, входящему в состав ИВС, для оптимальной интерпретации измерений могут быть иными, чем когда он используется отдельно от ЭВМ.

**Модель схемы измерения.** Схема (29.1) должна быть дополнена сведениями о приборе: вид оператора  $A$ , модель шума  $v$ . Хотя обычно измерительному прибору свойственны оба преобразования  $Af$  и  $Af+v$ , мы будем их разделять для удобства математического описания и оператор  $A$  ассоциировать с собственно прибором.

Характерные примеры приборов можно получить, рассмотрев эксперименты, в которых равенство (29.1) связывает распределение яркости излучения на поверхности объекта и его оптическое изображение, например, в микроскопе, истинный контур спектральной линии и наблюдаемый на спектографе, сигналы на входе и выходе электрического фильтра. В этих случаях  $A$ , как правило, можно записать в виде интегрального оператора

$$Af(y) = \int_X a(x-y) f(x) dx, \quad y \in Y. \quad (29.4)$$

Функция  $a(\cdot)$  (ядро  $A$ ) называется еще аппаратной функцией прибора  $A$ . Если, к примеру,  $A$  — микроскоп, его аппаратную функцию можно интерпретировать как изображение точечного источника света единичной интенсивности. Обычно аппаратная функция имеет вид плавной кривой с одним пиком (иногда несколькими). Чем меньше ширина пика аппаратной функции, тем лучше прибор различает два близких точечных источника. Минимальное расстояние между точечными источниками, при котором они еще различаются на выходе прибора, было выбрано Рэлеем как мера разрешающей способности. В реальных задачах, как уже было сказано, измерения обычно проводятся в дискретных точках  $y_i, i=1, \dots, n$ , а интеграл в (29.4) можно заменить приближенно какой-либо квадратурной формулой с  $m$  узлами, так что получается так называемое дискретное представление (29.3) равенства (29.2), в котором  $a_{ij}=a(x_i-y_j), i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$ . В итоге оператор  $A$  представлен матрицей  $\{a_{ij}\}_{n \times m}$  в некотором естественном для эксперимента базисе. Отметим также что на выходе ИВС мы получаем обычно конечномерный вектор значений как результат дискретных вычислений, так что искомым оператором  $R$  также задается матрицей.

Распространенной мерой разрешающей способности служит погрешность воспроизведения параметров объекта или различие между  $R\xi$  и  $Uf$ . Довольно естественный, хотя и не единственный способ ее оценки — величина  $E\|R\xi - Uf\|^2$ , где  $E$  — символ вычисления математического ожидания или усреднения по реализа-

циям случайной величины  $v$ , входящей в состав  $\xi$ . Так, выбранная оценка погрешности позволяет найти решение, используя минимальную информацию о модели схемы измерения (29.1). Для этого должны быть известны (задан) оператор  $A$  и корреляционный оператор  $\Sigma$  шума  $v$ , определяемый равенством  $\Sigma x = E v(x, v)$ ,  $\forall x \in R_n$  (напомним, что мы будем считать всегда, что  $E v = 0$ ). Таким образом, заданную информацию о схеме измерения (29.1) мы назовем «моделью схемы измерения» и обозначим  $[A, \Sigma]$ .

Если в  $R_n$  выбран ортонормированный базис  $\{e_i\}$ , то оператор  $\Sigma$  можно задать его матричными элементами

$$\sigma_{ij} = (\Sigma e_j, e_i), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Поскольку в таком случае  $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ ,  $v_i = (v, e_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$\sigma_{ii} = E v_i^2$  — средняя энергия  $i$ -й координаты  $v$  (дисперсия), а  $\sigma_{ij} = E v_i v_j$  при  $i \neq j$  задает корреляционную связь между  $i$ -й и  $j$ -й координатами,  $v$  характеризующую тенденцию совместного поведения  $v_i$  и  $v_j$  в среднем. При этом средняя энергия шума равна

$$E \|v\|^2 = E \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{ii} = \text{tr } \Sigma \text{ и не зависит от выбора базиса.}$$

Отметим также очевидные свойства оператора  $\Sigma$  (матрицы  $\|\sigma_{ij}\|$ ): симметричность и неотрицательность. Если в качестве базисных выбрать собственные векторы  $\Sigma$ , то его матрица станет диагональной и корреляционные связи между координатами  $v$  в этом базисе исчезнут. Такой базис носит специальное название базиса Карунена—Лоэва.

Как уже отмечалось, модель  $[A, \Sigma]$  характеризует минимальную информацию о схеме измерения (29.1), позволяющую решить задачу редукции. В общем случае принципы построения оператора  $R$  зависят от конкретной задачи редукции и от модели схемы измерений. Рассмотрим другие модели. Если в (29.1)  $f$  можно понимать как случайный вектор со значениями в  $R_m$ , то будем считать, что кроме  $A$  и  $\Sigma$  задан корреляционный оператор  $F$  вектора  $f$ ,  $Fx = E f(x, f)$ ,  $\forall x \in R_m$ . В этом случае будем говорить, что задана модель  $[A, F, \Sigma]$  схемы измерений (29.1). Если же сверх того известно еще и среднее значение  $E f = f_0$ , то будем говорить, что задана модель  $[A, f_0, F, \Sigma]$ , но здесь  $F$  — ковариационный оператор  $f$ , или, что то же самое, корреляционный оператор вектора  $f - f_0$ .

**Несмещенная редукция измерений.** В задаче редукции измерений требуется определить оператор  $R$  так, чтобы  $R\xi$  было максимально точной версией  $Uf$ . Определим погрешность редукции равенством

$$\begin{aligned} n(R, U) &= \sup_f E \|R\xi - Uf\|^2 = \sup_f E \|(RA - U)f + Rv\|^2 = \\ &= \sup_f E \|(RA - U)f\|^2 + \text{tr } R\Sigma R^*, \end{aligned} \quad (29.5)$$

где, как нетрудно убедиться,  $E\|Rv\|^2 = \text{tr} R \Sigma R^*$ . (Оператор  $R^*$ , называемый сопряженным с  $R$ , определяется равенством  $(Rx, y) = (x, R^*y)$ . В ортонормированном базисе ему соответствует транспонированная матрица.) Поскольку в данном случае  $f$  — произвольный вектор  $\mathcal{R}_m$ , условие  $n(R, U) < \infty$  эквивалентно равенству  $RA = U$ . Таким образом, задача несмещенной редукции формулируется так: для данных операторов  $A$ ,  $\Sigma$  и  $U$  требуется определить  $R$  из условия

$$\min\{\text{tr} R \Sigma R^* \mid R, RA = U\}, \quad (29.6)$$

что буквально означает: найти оператор  $R$  такой, для которого  $\text{tr} R \Sigma R^*$  достигает минимума при дополнительном условии  $RA = U$ .

Для так определенного  $R$  погрешность редукции

$$\sup E\|R\xi - Uf\|^2 = E\|Rv\|^2 = \text{tr} R \Sigma R^* \quad (29.7)$$

минимальна и тем самым редукция дает самое точное решение задачи интерпретации в классе линейных решений. Название «несмещенная» связано со следующим свойством:

$$ER\xi = E(RAf + Rv) = Uf, \quad f \in \mathcal{R}_m,$$

означающим, что в среднем редукция  $R\xi$  совпадает с  $Uf$ .

Будем говорить, что задача редукции (29.6) сформулирована для модели  $[A, \Sigma]$  схемы измерений (29.1).

Для решения задачи (29.6) следует выяснить условия разрешимости уравнения

$$RA = U. \quad (29.8)$$

Удобнее всего это сделать, используя эффективную технику псевдообращения. Операторное уравнение (29.8) разрешимо, если и только если  $U(I - A^-A) = 0$  (оператор (матрица)  $A^- = \lim_{\omega \rightarrow \infty} A^*(AA^* + \omega I)^{-1} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (A^*A + \omega I)^{-1} A^*$  называется псевдообратным к  $A$ ).

Всякое его решение можно представить в виде

$$R = UA^- + Z(I - AA^-) \quad (29.9)$$

при некотором операторе  $Z$ . Слагаемые в (29.9) ортогональны в смысле скалярного произведения операторов (матриц)

$$(A, B)_2 = \text{tr} AB^*. \quad (29.10)$$

Решение  $R = UA^-$  имеет минимальную норму  $\|R\| = \sqrt{\overline{(R, R)_2}}$ .

**Теорема.** Задача редукции (29.6) для модели  $[A, \Sigma]$  имеет решение тогда и только тогда, когда

$$U \in \mathcal{D}_{[A, \Sigma]} = \{U : U(I - A^-A) = 0\}. \quad (29.11)$$

Если корреляционный оператор  $\Sigma$  невырожден, то при условии (29.11) задача имеет единственное решение

$$R = U(\Sigma^{-1/2}A)^{-}\Sigma^{-1/2} = U(A^*\Sigma^{-1}A)^{-}A^*\Sigma^{-1}. \quad (29.12)$$

Шум редукции  $R\xi - Uf = Rv$  и имеет среднюю энергию

$$E \|R\xi - Uf\|^2 = E \|Rv\|^2 = \text{tr } U(A^*\Sigma^{-1}A)^{-}U^*. \quad (29.13)$$

*Доказательство.* Условие (29.11) необходимо и достаточно для разрешения уравнения (29.8). Поскольку ему эквивалентно  $R\Sigma^{1/2}(\Sigma^{-1/2}A) = U$ , то

$$RE^{1/2} = U(\Sigma^{-1/2}A)^{-} + Z(I - \Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^{-}).$$

Отсюда, учитывая, что  $(\Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^{-})^* = \Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^{-}$ ,

$$U(\Sigma^{-1/2}A)^{-}[I - \Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^{-}]Z = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} h(R, U) &= \text{tr } R\Sigma R^* = \text{tr } U(\Sigma^{-1/2}A)^{-}[U(\Sigma^{-1/2}A)^{-}]^* + \\ &+ \text{tr } Z(I - \Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^{-})Z^* \geq \text{tr } U(\Sigma^{-1/2}A)^{-}[U(\Sigma^{-1/2}A)^{-}]^* = \\ &= \text{tr } U(A^*\Sigma^{-1}A)^{-}U^*. \end{aligned} \quad (29.14)$$

Здесь мы воспользовались следующими свойствами псевдообратного оператора:  $A^*AA^- = A^*$ ,  $(A^*A)^- = A^-(A^*)^-$ , а также тем, что  $AA^-$  и  $I - AA^-$  — ортогональные проекторы в  $\mathcal{R}_n$ . Очевидно, что минимум в (29.14) достигается на единственном  $R$  (29.12) и средняя энергия шума редукции равна (29.13).

По аналогии с формулой (29.1) вектор  $R\xi = RAf + Rv$  или выходной сигнал прибора  $RA = U$  (равный значениям параметров объекта), на вход которого поступил сигнал  $f$ . Условие разрешимости  $U \in \mathcal{D}_{[A, \Sigma]}$  (необходимое и достаточное) задачи несмещенной редукции означает, что всякий раз, когда  $Af = 0$ , то и  $Uf = 0$ , что совершенно прозрачно: если  $Af = 0$ , то в измерении  $\xi$  нет информации о  $f$ , и о  $Uf$ , если  $Uf \neq 0$ .

Будем считать, что в ИВС полностью реализуется оператор  $R$  (29.12), который в свою очередь определяется моделью  $[A, \Sigma]$ , и это последнее обозначение также относится к ИВС. Для того чтобы проводить сравнение ИВС (сравнение моделей схемы измерения), введем определения.

1) Будем говорить, что ИВС как измерительный прибор определяется функцией  $h(R, U)$ ,  $U \in \mathcal{D}_{[A, \Sigma]}$ . Ее область определения  $\mathcal{D}_{[A, \Sigma]}$  задает возможности синтеза приборов на ИВС  $[A, \Sigma]$ , сама она определяет погрешность измерения на ИВС.

2) ИВС  $[A, \Sigma]$  равномерно не хуже ИВС  $[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$  или  $[A, \tilde{\Sigma}] < [\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$ , если:

$$a) \mathcal{D}[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}] \subset \mathcal{D}[A, \Sigma],$$

$$б) h(R, U) \leq \tilde{h}(R, U), \quad V \in T[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}].$$

Если  $[A, \Sigma] \leq [\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$  и  $[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}] \leq [A, \Sigma]$ , то ИВС эквивалентны,  $[A, \Sigma] \sim [\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$ .

Таким образом, в любой ситуации, если  $[A, \Sigma] \leq [\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$ , то ИВС  $[A, \Sigma]$  предпочтительнее  $[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$ , поскольку имеет более широкие возможности редукции и не большую энергию шума.

Как видно, качество ИВС зависит от входящего в нее прибора  $A$ , однако эта зависимость не столь очевидна, поскольку не обязательно лучшему прибору  $A$  отвечает ИВС более высокого качества.

В частности, принято считать, что хороший прибор — это тот, который не искажает сигнал и не вносит погрешности. Таким образом, оценка качества прибора, используемого непосредственно, может быть охарактеризована величиной

$$\mathbf{E} \|\xi - f\|^2 = \mathbf{E} \|(A - I)f + v\|^2 = \|(A - I)f\|^2 + \text{tr } \Sigma.$$

При фиксированном корреляционном операторе  $\Sigma$  результат лучше всего при  $A = I$  (это соответствует  $\delta$ -образной аппаратной функции).

В качестве примера рассмотрим случай двух измерений и запишем матрицу  $A$  в виде

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Число  $b$  характеризует «неидеальность» прибора: при  $b = 0$ ,  $A = I$ , т. е. прибор идеальный. Это значит, что если прибор используется как таковой, то  $b$  следует брать как можно меньше.

Рассмотрим, как зависит точность (качество) ИВС от  $b$ , если прибор  $A$  используется в составе ИВС (будем считать, что  $\Sigma = I$ )?

$$n = \text{tr}(A^* A)^{-1} = \frac{2(1 + b^2)}{(1 - b^2)^2}.$$

Анализ этой формулы показывает, что возможна ситуация, когда (при  $b > \sqrt{3}$ ) прибор как таковой плохой, а ИВС реализует хороший измерительный прибор. Наоборот, при достаточно хорошем приборе ( $b < 1$ ) невозможно уменьшить ошибку ниже уровня  $n = 2$ , а при плохом (при  $b > \sqrt{3}$ ) можно.

### § 30. ПОНЯТИЕ НАДЕЖНОСТИ МОДЕЛИ

Как было показано, если задана модель  $[A, \Sigma]$  с невырожденным корреляционным оператором  $\Sigma$ , решение для  $R$  дается формулой (29.12) и  $R\xi = RAf + Rv$  можно интерпретировать как искаженный шумом  $Rv$  результат измерения  $f$  на приборе  $U = RA$ ,

выходной сигнал которого равен параметрам исследуемого объекта. Погрешность редукции

$$h = E \|R\xi - Uf\|^2 = \text{tr } U (A^* \Sigma^{-1} A)^{-1} U^*$$

в этом случае минимальна. Если же модель неверна, причем ошибочно задан оператор  $A$ , то на самом деле  $\xi = Bf + v$ ,  $B \neq A$ , и

$$E \|R\xi - Uf\|^2 = \|U (A^* \Sigma^{-1} A)^{-1} A^* \Sigma^{-1} (B - A) f\|^2.$$

Ясно, что если  $B \neq A$ , то  $\sup_f E \|R\xi - Uf\|^2 = \infty$ .

Попытаемся оценить, верна ли модель, анализируя ее на предмет соответствия полученным экспериментальным данным. Для простоты будем считать, что оператор  $\Sigma = I$  (общий случай сводится к этому преобразованием  $\xi \rightarrow \Sigma^{-1/2} \xi$ ) известен точно,  $U = I$ , а сомнение вызывает оператор  $A$ . Кроме того, предположим, что шум  $v$  распределен нормально  $\mathcal{N}(0, I)$  или  $v_i \in \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и независимы.

Если модель верна, то при этих предположениях

$$\xi = Af + v, \quad f \in \mathcal{R}_m, \quad v \in \mathcal{N}(0, I),$$

а если неверна, то

$$\xi = Bf + v, \quad f \in \mathcal{R}_m, \quad v \in \mathcal{N}(0, I), \quad B \neq A.$$

Поскольку априори  $f$  произвольный вектор  $\mathcal{R}_m$ ,  $Af$  — произвольный вектор  $\mathcal{R}(A)$  и при  $\xi = Bf + v$  условие  $B \neq A$  не сможет быть проверено, если  $Bf \in \mathcal{R}(A)$ . В лучшем случае мы можем отвергнуть модель  $[A, \Sigma]$ , если  $Bf \notin \mathcal{R}(A)$ , поэтому рассмотрим задачу проверки гипотезы  $\mathcal{H}$ :

$$\xi = a + v, \quad a \in \mathcal{R}(A), \quad v \in \mathcal{N}(0, I)$$

против альтернативы  $\mathcal{H}$ :

$$\xi = b + v, \quad b \notin \mathcal{R}(A), \quad v \in \mathcal{N}(0, I).$$

Если гипотеза  $\mathcal{H}$  верна, это еще не означает, что верна модель  $[A, \Sigma]$ , но если верна альтернатива, то модель неверна.

Прежде всего рассмотрим более общую задачу проверки гипотез о значениях параметров распределений. В такой задаче задано распределение случайной величины, зависящее известным способом от неизвестного параметра, причем множество значений параметра разделено на две части, одна из которых соответствует гипотезе  $\mathcal{H}$ , это множество обозначим  $\mathcal{H}$ , а другая — альтернативе  $\mathcal{K}$ . Гипотеза (альтернатива) называется *простой*, если множество  $\mathcal{H}(\mathcal{K})$  состоит из одной точки:  $\mathcal{H} = \{\theta_0\}$  ( $\mathcal{K} = \{\theta_1\}$ ). Требуется по значениям случайной величины определить, к какому из множеств следует отнести неизвестное значение параметра, которое на самом деле определяет ее распределение. Правило, по которому принимается решение, называется решающей процеду-

рой, или критерием. В конечном счете это правило во многих случаях сводится к указанию области  $X$  и проверке включения  $\xi \in X$  или  $\xi \notin X$ . Если первое отвечает альтернативе, а второе — гипотезе, то  $X$  называется критическим множеством. Ясно, что в этом случае указание критерия равносильно указанию критического множества. Поскольку при верной гипотезе случайная величина может попасть в критическое множество, возможна ошибка 1-го рода, причем вероятность такой ошибки (уровень значимости) обычно задается. Что касается ошибки 2-го рода, когда гипотеза принимается, а на самом деле она неверна, то ее вероятность стремятся уменьшить выбором критерия. Понятно, что предпочтителен такой критерий, который при данном уровне значимости обладает минимальной ошибкой 2-го рода, или *наиболее мощный*.

Рассмотрим задачу проверки «простой» гипотезы  $\Theta = \Theta_0$  против «простой» альтернативы  $\Theta = \Theta_1$ ,  $\Theta_0 \neq \Theta_1$ . Решение этой задачи — наиболее мощный критерий — определяется следующим критическим множеством:

$$X = \left\{ x, \frac{p(x, \theta_0)}{p(x, \theta_1)} \leq C \right\}, \quad (30.1)$$

где  $C$  определяется уровнем значимости  $\int_X p(x, \theta_0) dx = \alpha$ , при

этом *мощность* критерия  $\int_X p(x, \theta_1) dx$  максимальна\*.

Надежностью гипотезы  $\Theta = \Theta_0$  назовем

$$\alpha(\xi) = \inf \{ \alpha | \xi \in X(\alpha) \} \quad (30.2)$$

— минимальный уровень значимости, при котором  $\xi$  принадлежит критическому множеству  $X$ .

Другими словами, надежность  $\alpha(\xi)$  — минимальная вероятность ошибочно отвергнуть гипотезу на основании измерения  $\xi$ . Надежность как функция от случайной величины  $\xi$  сама является случайной величиной; ее распределение зависит от того, верна ли гипотеза ( $\Theta = \Theta_0$ ) или альтернатива ( $\Theta = \Theta_1$ ). Если  $\Theta = \Theta_0$ , то  $\alpha(\xi)$  — случайная величина, равномерно распределенная на  $[0, 1]$ . Если же верна альтернатива  $\Theta = \Theta_1$ , то плотность вероятности  $\alpha(\xi)$  неограниченна в нуле. Поэтому если верна альтернатива, то надежность должна концентрироваться вблизи нуля.

В случае сложных гипотез и альтернатив может оказаться, что сам критерий (и надежность) зависят от параметра  $\Theta$  и тогда особенно ценны равномерно наиболее мощные критерии, однако гарантировать существование такого критерия нельзя.

Вернемся теперь к модели  $[A, \Sigma]$ .

Прежде всего заметим, что:

---

\* См. лемму Неймана-Пирсона в книге: Пытьев Ю. П., Шишмарев И. А. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983, 252 с.

1. Если  $\mathbf{v} \in N(0, I)$ , то  $V\mathbf{v} \in \mathcal{N}(0, I)$ , где  $V$  — любое ортогональное преобразование. Действительно,

$$\begin{aligned} P(V\mathbf{v} \in \mathcal{D}) &= \int_{V\mathbf{x} \in \mathcal{D}} (2\pi)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \right\} d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} (2\pi)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|V^{-1}\mathbf{x}\|^2 \right\} |\det V^{-1}| d\mathbf{x} = P(\mathbf{v} \in \mathcal{D}). \end{aligned}$$

2. Распределение случайной величины  $\tau = \|\mathbf{v} + \mathbf{a}\|^2$ , где  $\mathbf{v} \in N(0, I)$ , зависит только от  $\|\mathbf{a}\|$ . Действительно, случайная величина  $\tau' = \|V\mathbf{v} + \mathbf{a}\|^2 = \|V(\mathbf{v} + V^{-1}\mathbf{a})\|^2 = \|\mathbf{v} + V^{-1}\mathbf{a}\|^2$  при любом ортогональном операторе  $V$  распределена так же, как  $\tau$ . Следовательно, распределение  $\tau' = \|\mathbf{v} + \mathbf{a}\|^2$  не зависит от  $V$ , т. е. определяется величиной  $\|V^{-1}\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 = \Theta$ .

3. Распределение  $\tau = \|\mathbf{v} + \mathbf{a}\|^2$ ,  $\mathbf{v} \in N(0, I)$ , носит название  $\chi^2$  — распределения с  $n$  степенями свободы ( $\mathbf{v} \in \mathcal{R}_n$ ) и параметром нецентральности  $\Theta = \|\mathbf{a}\|^2$ .

Иначе говоря  $\tau = \sum_{j=1}^n (v_j + a_j)^2$ , где  $v_i \in \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$v_1, \dots, v_n$  независимы и  $\mathbf{v} + \mathbf{a} = \sum_{j=1}^n (v_j + a_j) \mathbf{e}_j$ , где  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  — ортонормированный базис  $\mathcal{R}_n$ .

Сказанное не зависит от выбранного базиса  $\{\mathbf{e}_i\}$ , ибо переход к другому базису можно представить как ортогональное преобразование  $\mathbf{e}_j \rightarrow V\mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $\mathbf{v} + \mathbf{a} \rightarrow V(\mathbf{v} + \mathbf{a})$ , не меняющее распределение  $\tau$ .

4. Пусть оператор  $\Pi$  ортогонально проектирует в  $\mathcal{R}_n$  на линейное подпространство  $\mathcal{R}_m$ . Тогда  $\tau = \|\Pi(\mathbf{v} + \mathbf{a})\|^2$  имеет  $\chi^2$  распределение с  $m$  степенями свободы и параметром нецентральности  $\Theta = \|\Pi\mathbf{a}\|^2$ . Действительно, выберем ортонормированный базис  $\{\mathbf{e}_i\} \in \mathcal{R}_n$  так, чтобы векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  образовывали ортонормированный базис  $\mathcal{R}_m$ . Тогда

$$\Pi(\mathbf{v} + \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m (v_j + a_j) \mathbf{e}_j, \quad \|\Pi(\mathbf{v} + \mathbf{a})\|^2 = \sum_{j=1}^m (v_j + a_j)^2,$$

где  $v_i \in \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $j = 1, \dots, m$  и попарно независимы.

5. Пусть  $p_\Theta(z)$  — плотность распределения  $\tau = \|\mathbf{v} + \mathbf{a}\|^2$ ,  $\Theta = \|\mathbf{a}\|^2$ , т. е.

$$\int_0^z p_\Theta(z') dz' = \int_{\|\mathbf{x} + \mathbf{a}\| \leq z} (2\pi)^{-n/2} \exp \left( -\frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \right) d\mathbf{x},$$

или

$$p_\Theta(z) = \frac{d}{dz} \int_{\|\mathbf{x} + \mathbf{a}\| \leq z} (2\pi)^{-n/2} \exp \left( -\frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \right) d\mathbf{x}.$$



Тогда  $p_0(z)/p_\theta(z)$  при любом  $\theta > 0$  — монотонно убывающая функция  $z > 0$ . Следовательно, в задаче проверки гипотезы  $\theta = 0$  против альтернативы  $\theta = \theta_0 > 0$  множество принятия гипотезы

$$X_0 = \{z, p_0(z)/p_{\theta_0}(z) \geq C(P)\} = \{z, z \leq \tilde{C}(P)\},$$

где  $\tilde{C}(P)$  определяется условием

$$\int_0^{\tilde{C}(P)} p_{\theta_0}(z) dz = P$$

и не зависит от альтернативы. Иначе говоря,  $\bar{X}_0$  — множество принятия гипотезы  $\theta = 0$ , равномерно наиболее мощное относительно альтернативы  $\theta = \theta_0 > 0$ .

Рассмотрим вновь задачу проверки гипотезы  $\xi = a + v$ ,  $a \in \mathcal{R}(A)$  при альтернативе  $\xi = b + v$ ,  $b \notin \mathcal{R}(A)$ . Пусть  $\xi = Af + v$ ,  $v \in \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\hat{f} = (A^*A)^{-1}A^*\xi$ ,  $\dim \mathcal{R}(A) = m < n$ ,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad v_i \in \mathcal{N}(0, 1), \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \xi - A\hat{f} &= A(f - \hat{f}) + v = Af + v - A(A^*A)^{-1}A^*(Af + v) = \\ &= [I - A(A^*A)^{-1}A^*]v = (I - \Pi)v, \end{aligned}$$

где  $\Pi$  ортогонально проектирует на  $\mathcal{R}(A)$  и, следовательно,  $\tau_{n-m} = \|\xi - A\hat{f}\|^2 = \|(I - \Pi)v\|^2 = \|(I - \Pi)\xi\|^2$  имеет  $\chi^2$  распределение с  $n - m$  степенями свободы и параметром нецентральности  $\theta = 0$ .

Если модель неверна, то  $\xi = Bf + v$ ,

$$\begin{aligned} \xi - A\hat{f} &= Bf + v - A(A^*A)^{-1}A^*(Bf + v) = \\ &= [I - A(A^*A)^{-1}A^*](Bf + v) = (I - \Pi)(Bf + v). \end{aligned}$$

В этом случае  $\tau_{n-m} = \|(I - \Pi)(Bf + v)\|^2 = \|(I - \Pi)((B - A)f + v)\|^2$  имеет  $\chi^2$  распределение с  $n - m$  степенями свободы и параметром нецентральности  $\theta = \|(I - \Pi)Bf\|^2$ .

Множество принятия гипотезы  $\bar{X} = \{z, z \leq C(P)\}$ , где  $\int_0^{C(P)} p_\theta(z) \times dz = P$ , т. е. модель  $[B, \Sigma]$  отвергается, если  $\tau_{n-m}(\xi) > C(P)$ . Следуя (30.2), определим надежность модели  $[A, \Sigma]$ :

$$\alpha(\xi) = \inf \{1 - P | \tau_{n-m}(\xi) > C(P)\} = \int_{\tau(\xi)}^{\infty} p_0(x) dx.$$

Таким образом, на выходе ИВС мы получаем результат редукции  $R\xi$ , среднюю погрешность редукции  $h$  и надежность модели

$\alpha(\xi)$ . Величина надежности позволяет контролировать, насколько используемая нами модель соответствует данному измерению. Когда надежность мала, модель должна быть отвергнута, если у нас нет иных оснований для ее использования. Вместе с моделью мы ставим под сомнение и результат редукции  $\mathcal{R}\xi$  и погрешность  $h$ . В связи с этим подчеркнем еще раз, что  $h$  — теоретическая оценка погрешности, основанная лишь на модели и не зависящая от результатов измерений  $\xi$ .

Пусть нам задано некоторое множество моделей и заранее неизвестно, какую из них следует выбрать для интерпретации измерений. Надежность  $\alpha(\xi)$  можно рассматривать как функцию предпочтения на множестве моделей. Исходя из этого следует выбрать ту модель, которой отвечает наибольшее значение надежности (принцип максимальной надежности).

Итак, статистика  $\alpha(\xi)$  при некоторых условиях позволяет обнаружить несостоятельность модели  $[A, \Sigma]$ . Вместе с тем несостоятельность модели еще не означает, что ею нельзя пользоваться для вычисления редукции. С другой стороны, приемлемое значение надежности  $\alpha(\xi)$  не означает, что модель верна, и, более того, не может гарантировать возможность использования модели  $[A, \Sigma]$  для вычисления редукции.

Формально это связано с тем, что надежность модели зависит от вектора  $q_1 = (I - \Pi)(B - A)f$ , а погрешность — от вектора  $q_2 = \Pi(B - A)f$ . Эти два вектора ортогональны, и, оценивая с помощью надежности модели величину первого, в общем случае ничего нельзя сказать о втором. Существует, однако, ситуация, позволяющая на основании измерения  $\xi$  высказаться о векторе  $q_2$  и ввести (аналогично понятию надежности модели) понятие надежности редукции. Надежность редукции в терминах теории проверки статистических гипотез позволяет ответить на вопрос, можно ли пользоваться формулами редукции независимо от того, верна модель или нет. Более подробно надежность редукции, а также другие рассмотренные здесь вопросы изложены в книге Ю. П. Пытьева «Методы анализа и интерпретации эксперимента» (М.: Изд-во Моск. ун-та. 1990, 228 с.).

# ЧАСТЬ II

## ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО МЕХАНИКЕ

---

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ЧАСТИ II

1. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1986.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Том I. Механика. 3-е изд. М.: Наука, 1989.
3. Хайкин С. Э. Физические основы механики. 2-е изд. М.: Наука, 1971.
4. Стрелков С. П. Механика. 3-е изд. М.: Наука, 1975.
5. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964.

**Введение.** Любое реальное физическое тело можно мысленно разделить на достаточно малые части, такие, что каждую из них можно рассматривать как материальную точку. В этом представлении физическое тело может рассматриваться как некоторая совокупность конечного числа материальных точек, т. е. как система материальных точек.

Каждая материальная точка системы может взаимодействовать с другими материальными точками системы и материальными точками или телами, не входящими в данную систему. Силы, действующие на материальную точку со стороны других материальных точек системы, называются внутренними силами, а действующие со стороны материальных точек или тел, не входящих в рассматриваемую систему,— внешними.

В природе существуют различные тела. У некоторых из них различные части тела могут свободно перемещаться друг относительно друга, например в газах, жидкостях, сыпучих телах. У других тел взаимное расположение частей относительно фиксировано, в результате чего они относительно устойчиво сохраняют свою форму. Такие тела называются твердыми телами. Под действием внешних сил может происходить изменение формы твердого тела, которое называется деформацией тела.

Если эта деформация пропорциональна вызывающим ее внешним силам, то такие твердые тела называются упругими твердыми телами (эти тела подчиняются закону Гука).

В ряде случаев законы движения твердого тела могут существенно отличаться от законов движения материальной точки и определяться размерами, формой и распределением массы твердого тела. При этом часто деформации тела не играют существенной роли при описании движения тела и ими можно пренебречь. В этом случае мы приходим к важной абстракции *абсолютно твердого тела* как абсолютно жесткого, недеформируемого. Такое тело мы можем описать как систему математических точек, взаимное расположение которых друг относительно друга строго фиксировано.

Рассмотрим основные особенности кинематики и динамики абсолютно твердого тела. В дальнейшем в этой главе для краткости вместо термина «абсолютно твердое тело» будем использовать просто «твердое тело».

Произвольное движение твердого тела можно разложить на поступательное и вращательное. Поступательное движение, когда все точки твердого тела двигаются по одинаковым траекториям, в кинематическом отношении не отличается от движения материальной точки. Плоское вращательное движение — движение, при котором не менее двух точек тела остаются неподвижными. Прямая, проходящая через эти точки, называется осью вращения. Все точки, лежащие на оси, неподвижны, а остальные двигаются по окружностям, центры которых лежат на оси вращения.

При вращении твердого тела, радиус-вектор каждой точки, не лежащей на оси, за время  $dt$  поворачивается на угол  $d\varphi$ . Величина угловой скорости определяется как

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (8.1)$$

Угловая скорость является вектором и ее направление определяется так, чтобы выполнялось условие векторного произведения

$$\mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{r}_i, \quad (8.2)$$

где  $\mathbf{v}_i$  и  $\mathbf{r}_i$  — линейная скорость и радиус-вектор любой указанной точки. Производная

$$\mathbf{e} = \frac{d\omega}{dt} \quad (8.3)$$

называется угловым ускорением.

При поступательном движении скорости и ускорения всех точек твердого тела равны между собой. В нерелятивистском случае движение самого тела можно описать как движение его центра масс, точки  $C$  с координатами  $C(x_c, y_c, z_c)$ , радиус-вектор которой  $\mathbf{r}_C$  связан с массами и радиусами-векторами всех остальных точек соотношением

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}. \quad (8.4)$$

Импульсом (количеством движения) системы  $n$  точек называется вектор  $\mathbf{P}$ , приложенный к центру масс:

$$\mathbf{P}_C = \sum_i^n m_i \mathbf{v}_i. \quad (8.5)$$

Для поступательного движения на основе второго закона Ньютона можно записать

$$\frac{d\mathbf{P}_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{f}_i, \quad (8.6)$$

где  $\mathbf{F}_i$  — внешние силы, а  $\mathbf{f}_i$  — внутренние силы. По III закону Ньютона  $\mathbf{f}_i$  попарно равны между собой и  $\sum \mathbf{f}_i = 0$ , откуда получаем

$$\frac{d\mathbf{p}_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{v}_i \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) = m \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}. \quad (8.7)$$

Для получения уравнения моментов рассмотрим уравнение Ньютона для  $i$ -й материальной точки системы

$$\frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij},$$

где  $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$  — сила взаимодействия между  $i$ -й и  $j$ -й материальными точками. Будем полагать, что силы взаимодействия являются центральными, т. е.  $\mathbf{f}_{ij} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ . Умножим это уравнение векторно на  $\mathbf{r}_i$ , учитывая, что  $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v} = 0$ , (так как  $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$ ) и  $\mathbf{f}_{ij} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = 0$ , после суммирования по всем точкам системы получим

$$\frac{d}{dt} \sum_i m \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (8.8)$$

$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$  называется моментом импульса системы относительно точки, выбранной в качестве начала координат,  $\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$  — называется моментом внешних сил относительно той же точки. При этом уравнение (8.8) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (8.9)$$

Векторное уравнение (8.9) эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (8.10)$$

Уравнение  $\frac{dL_z}{dt} = M_z$  называется уравнением моментов относительно неподвижной оси  $Z$ , если начало координат лежит на этой оси. Применим это уравнение для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси  $Z$  с угловой скоростью  $\omega$ . Линейная скорость каждой материальной точки  $m_i$  нашего тела в этом случае будет  $\mathbf{v}_i = \omega R_i$ , где  $R_i$  расстояние от оси  $Z$ . Проекция момента импульса на ось  $Z$  для этих точек будет равна  $L_{iz} = R_i m_i v_i = \omega m_i R_i^2$ , так как  $\omega$  одинаково для всех точек системы. Для всего тела получаем

$$L_z = \sum L_{iz} = \omega \sum_i m_i R_i^2 = \omega J, \quad (8.11)$$

где  $J = \sum m_i R_i^2$  называют моментом инерции тела относительно неподвижной оси.

Подставляя (8.11) в (8.10), получаем основное уравнение движения для вращательного движения вокруг неподвижной оси  $Z$

$$\frac{d\omega}{dt} J = \varepsilon J = M_z. \quad (8.12)$$

При непрерывном распределении масс по телу для вычисления момента инерции пользуются не суммированием, а интегрированием по всему объему тела. При этом можно показать, что если произвести параллельный перенос оси вращения тела на расстояние  $a$ , то момент инерции тела относительно новой оси будет равен (теорема Гюйгенса—Штейнера)

$$J = J_0 + ma^2, \quad (8.13)$$

где  $J_0$  — момент инерции относительно первичной оси, причем удобно проводить ее через центр масс тела.

Важным случаем вращательного движения является движение физического маятника. Физическим маятником называется твердое тело, подвешенное на неподвижной горизонтальной оси в поле тяготения. Расстояние от оси вращения до центра масс обозначим через  $l$ , а угол отклонения маятника от вертикали через  $\alpha$ . При отклонении маятника на угол  $\alpha$  на маятник действует возвращающий момент силы тяжести, равный  $mgl \sin \alpha$ . Уравнение динамики имеет вид (при пренебрежении моментом сил трения)

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha. \quad (8.14)$$

Знак «минус» в уравнении означает, что момент сил направлен против увеличения угла  $\alpha$ ;  $J$  — момент инерции относительно оси, проходящей через точку подвеса. Если угол отклонения мал, то с большой точностью можно считать, что  $\sin \alpha \approx \alpha$ , и переписать уравнение в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J} \alpha = \ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0. \quad (8.15)$$

Путем подстановки нетрудно убедиться, что решением этого уравнения являются функции  $a \cos \omega t$  или  $a \sin \omega t$ .

Маятник совершает колебания с малой амплитудой  $a$ , частота и период которых определяются формулами

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (8.16)$$

Такие колебания называются гармоническими.

Пусть физический маятник состоит из материальной точки массой  $m$ , подвешенной на невесомом твердом стержне длиной  $l$  и колеблющейся около точки  $O$ . Такой маятник называется матема-

тическим. Заметив, что для него как твердого тела  $J = ml^2$ , найдем период колебания математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (8.17)$$

Обозначив через  $J_0$  момент инерции физического маятника относительно оси, проходящей через его центр массы, по теореме Гюйгенса  $J = J_0 + ma^2$  и формуле для периода колебаний физического маятника, получаем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{mgl} + \frac{l}{g}}. \quad (8.18)$$

Длина математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний физического маятника, называется приведенной длиной соответствующего физического маятника. Из сравнения формул видно, что приведенная длина физического маятника равна  $l_{\text{пр}} = J/ml^2$ . Точка физического маятника, расположенная на расстоянии  $l_{\text{пр}}$  от точки подвеса на прямой, проходящей через центр масс, называется центром качаний. Основное свойство центра качаний физического маятника состоит в том, что при подвесе маятника на ось, проходящую через этот центр, период колебаний не изменится. Таким образом, при переносе точки подвеса в центр качаний прежняя точка подвеса становится новым центром качаний, т. е. точка подвеса и центр качаний обратимы. Доказательство этого утверждения следует непосредственно из теоремы Гюйгенса—Штейнера и формулы для периода колебаний маятника.

*Литература к главе 8:* [1] — главы 2, 6, 8; [2] — главы V—VII; [3] — главы X, XIII; [4] — главы VII, VIII.

### *Лабораторная работа 1*

#### **Изучение законов равноускоренного движения на машине Атвуда**

Экспериментальная установка, получившая название «машина Атвуда», представляет из себя (см. рис. 8.1) вращающийся с максимально малым трением легкий блок  $B$ , через который перекинута тонкая нить с грузами  $C$  и  $C'$  одинаковой массы  $m = 60,0 \pm \pm 0,01$  г. Блок  $B$  крепится наверху вертикальной трубки-колонки  $A$ , на которой нанесена миллиметровая шкала. Если на груз  $C$  положить добавочный груз (перегрузок)  $D$  массы  $m_1$ , то система начнет двигаться с некоторым ускорением  $a$ . Основной задачей настоящей работы является получение сравнительно малых ускорений  $a$  (по сравнению с ускорением свободного падения  $g$ ) с



целью экспериментального изучения основных законов кинематики равноускоренного движения.

Прогонализировав на основе II закона Ньютона законы движения груза  $C$  с установленным на нем перегрузком массы  $m_1$ .

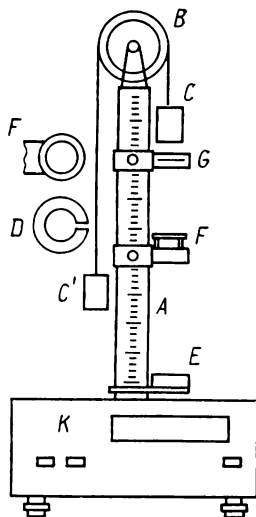


Рис. 8.1

Груз  $C$  взаимодействует с полем тяготения земли, нитью, перегрузком и окружающим воздухом. Так как мы исследуем достаточно медленные движения, а сопротивление воздуха пропорционально скорости движения, то в нашем случае сопротивление воздуха будет мало и мы им пренебрежем. Тогда для груза  $C$  можем написать

$$ma = mg + P - T_1, \quad (1)$$

где  $P$  — сила давления, с которой перегрузок  $D$  действует на груз  $C$ ,  $T_1$  — натяжение правой нити. Если предположить, что нить невесомая и нерастяжимая, то груз  $C'$  будет двигаться с тем же по величине, но обратным по знаку ускорением  $a$ . Для груза  $C'$  тогда имеем

$$-ma = mg - T_2, \quad (2)$$

где  $T_2$  — натяжение левой нити. Натяжение нитей  $T_1$  и  $T_2$  будут равны по величине только в том случае, если пренебречь массой блока и силами трения, возникающими в его оси. Если это упрощение недопустимо, то необходимо учесть закон движения блока

$$J_{\varepsilon} = (T_1 - T_2)R - F_{\text{TP}}r, \quad (3)$$

$F_{\text{тр}}$  — сила трения, действующая на ось блока,  $r$  — радиус оси блока,  $J$  — момент инерции блока, равный  $\alpha m_0 R^2$ ,  $m_0$  — масса бло-

ка,  $R$  — его радиус, а  $\alpha$  — коэффициент, зависящий от распределения массы в блоке (его формы),  $\varepsilon$  — угловое ускорение блока, которое при отсутствии скольжения нити по блоку связано с линейным ускорением  $a$  уравнением

$$a = \varepsilon R \quad (4)$$

(считаем, что глубина канавки блока мала по отношению к  $R$ ).

Наконец, закон движения перегрузка, считая что он не отрывается при движении от груза  $C$ , будет

$$m_1 a = m_1 g - N, \quad (5)$$

где  $N$  — сила реакции груза  $C$  на перегрузок, равная по III закону Ньютона  $|N| = |P|$ .

Решая систему (1) — (5), получаем выражения для  $a$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  и  $P$ . В частности, для ускорения системы  $a$  получаем

$$a = \frac{m_1}{2m + m_1 + \alpha m_0} \cdot g \quad (6)$$

и убеждаемся, что действительно, если  $m_1 \ll m$ , то  $a \ll g$ .

Увеличивая массу перегрузка  $m_1$ , можно увеличивать величину ускорения системы  $a$ . Если после того, как груз  $C$  с перегрузком прошел некоторое расстояние  $S_1$ , перегрузок  $m_1$  снять с груза  $C$ , то последний будет продолжать движение с постоянной скоростью, равной по величине скорости груза в момент снятия перегрузка. Для реализации такой ситуации на стержне  $A$  установки (см. рис. 8.1) имеются три кронштейна: нижний  $E$  — неподвижный, средний, с кольцевой платформой —  $F$  и верхний  $G$  — подвижные, которые можно перемещать вдоль колонки и фиксировать в любом положении, устанавливая таким образом длину пути равномерно ускоренного и равномерного движений. Все кронштейны имеют указатели положения, а верхний кронштейн — дополнительную черту, облегчающую точное согласование нижней грани (основного) груза  $C$  с определенным началом пути движения. На среднем кронштейне кроме кольцевой платформы закреплен фотоэлектрический датчик. В тот момент, когда кольцевая платформа снимает с большого груза  $C$  дополнительный грузик  $D$ , фотоэлектрический датчик образует электрический импульс, сигнализирующий о начале равномерного движения больших грузов  $C'$  и  $C$ . Оптическая ось фотоэлектрического датчика (черта на его корпусе) находится на уровне указателя положения среднего кронштейна.

Нижний кронштейн оснащен двумя платформами с резиновыми амортизаторами, в которые ударяются завершающие свое движение грузики, а также фотоэлектрическим датчиком с оптической осью на уровне указателя положения кронштейна. Фотоэлектрический датчик вырабатывает импульс напряжения, сигнализирующий о конце равномерного движения.

Система грузов может удерживаться в состоянии покоя с помощью специальной фрикционной муфты, перемещающейся с помощью электромагнита.

Для измерения времени  $t_2$  равномерного движения и управления фрикционной муфтой прибор имеет электронный блок  $K$ , в состав которого входят таймер и система управления электромагнитом. Включение электронного блока осуществляется нажатием клавиши «сеть». При нажатии на клавишу «сброс» происходит «обнуление» табло таймера. В исходном состоянии система заторможена посредством фрикционной муфты. Груз  $C$  устанавливают в исходное положение: его нижняя грань должна быть на уровне горизонтальной черты на верхнем кронштейне  $G$ . При нажатии на клавишу «пуск» происходит освобождение системы (разрывается цепь питания электромагнита) и генерируется импульс, дающий разрешение на включение таймера от импульса, который будет выработан фотоэлектрическим датчиком на среднем кронштейне  $F$  в момент снятия с груза  $C$  дополнительного грузика  $D$ . Импульс от нижнего фотоэлектрического датчика останавливает работу таймера; результат высвечивается на табло. При этом снова замыкается цепь электромагнита и система затормаживается фрикционной муфтой.

На машине Атвуда можно проверить законы равноускоренного движения и второй закон Ньютона, что и является целью работы. Пусть грузы  $C'$  и  $C$  проходят равноускоренно путь  $S_1$  (от кронштейна  $G$  до кронштейна  $F$ ) с ускорением  $a$  (формула (6)) в течение времени  $t_1$ , тогда

$$S_1 = \frac{at_1^2}{2}, \quad (7)$$

а скорость в конце пути будет

$$v = at_1. \quad (8)$$

Тогда, если тела  $C'$  и  $C$  проходят затем равномерно (со скоростью  $v$ ) пусть  $S_2$  (от кронштейна  $F$  до кронштейна  $E$ ) за время  $t_2$ , то

$$S_2 = vt_2, \quad (9)$$

и из уравнений (7) — (9) можно получить следующее соотношение:

$$a = \frac{S_2^2}{2S_1t_2^2}. \quad (10)$$

Из уравнений (10) и (6) следует, что если величина массы перегрузка  $m_1$  постоянна, то величина ускорения  $a$  системы будет также неизменна при любых комбинациях величин  $S_1$  и  $S_2$ . Проверке этого утверждения и определение величины  $a$  для заданного перегрузка и составляет содержание первого упражнения.

Определив из серии комбинаций  $S_1$  и  $S_2$  среднее значение  $\bar{a}$ , из формулы (6) можно найти неизвестную величину  $\alpha m_0$ , связанную с конечным значением момента инерции блока

$$\alpha m_0 = m_1 \frac{g-a}{a} - 2m, \quad (11)$$

где  $g=9,81 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  — величина ускорения свободного падения.

Определение величины  $\alpha m_0$  позволяет проверить справедливость формулы (6) для случая различных значений перегрузок  $m_1$  при фиксированных значениях  $S_1$  и  $S_2$ , что составляет содержание второго упражнения.

**Измерения.** В первом упражнении определяется значение ускорения системы  $a$  для наиболее тяжелого перегрузка  $D$  (значение массы  $m_1$  указана на перегрузке). Устанавливается не менее восьми различных комбинаций путей  $S_1$  и  $S_2$ , и для каждой комбинации не менее 5—6 раз определяется время  $t_2$  прохождения пути  $S_2$ . Для каждой комбинации определяется среднее значение  $\bar{t}_2$ , а из (10) определяется  $a$ . Затем из всех комбинаций находится среднее значение  $\bar{a}$ . Используя это среднее значение  $\bar{a}$ , из (11) находят значение  $\alpha m_0$ .

Во втором упражнении устанавливают фиксированные значения  $S_1$  и  $S_2$  и определяют значения ускорений  $a_i$  для различных значений массы перегрузка  $m_1$ . Для каждого перегрузка время  $t_2$  определяется не менее 5—6 раз и вычисляется среднее его значение  $\bar{t}_2$ , которое используется для определения значения  $a_i$  по формуле (10). Полученное значение  $a_i$  сравнивается для каждого перегрузка со значением  $a_i$ , вычисленным по формуле (6), где в качестве  $\alpha m_0$  используется значение, полученное в первом упражнении.

*Литература:* [1] — § 8, 9; [2] — § 32, 33; [3] — § 89.

## Лабораторная работа 2

### Изучение колебаний физического маятника

Физическим маятником является любое твердое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси в поле силы тяжести.

В данной работе в качестве физического маятника используется длинный однородный металлический стержень, имеющий легкую передвижную шайбу с опорными призмами, которая может закрепляться в любом месте стержня. Для определения положения закрепления опорных призм на стержень нанесена шкала (см. рис. 8.2). Период колебания изучаемого маятника определяется формулой (см. Введение, (8.12) — 8.18)).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{amg}}, \quad (1)$$

где  $J_0$  — момент инерции маятника относительно центра масс (см. (8.1)),  $a$  — расстояние от центра масс до точки подвеса,  $m$  — масса маятника.

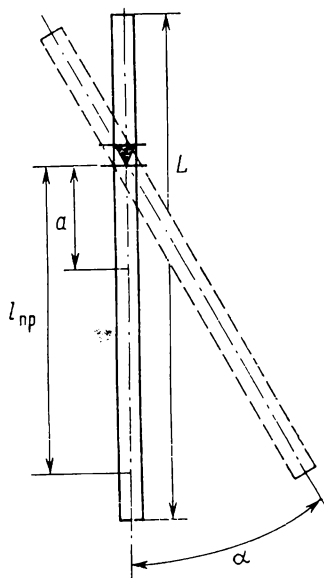


Рис. 8.2

Момент инерции однородного стержня относительно центра масс будет  $J_0 = mL^2/12 = ma_0^2$ , где  $a_0$  — радиус инерции, и вместо (1) можно записать

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L^2}{12ag} + \frac{a}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{a_0^2 + a^2}{ag}}. \quad (2)$$

Нашему физическому маятнику можно сопоставить такой математический маятник, чтобы их периоды совпадали. При этом (см. введение) длина математического маятника равна приведенной длине  $l_{пр}$  физического маятника, причем

$$l_{пр} = \frac{a_0^2 + a^2}{a} = \frac{a_0^2}{a} + a, \quad (3)$$

а период его будет равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}. \quad (4)$$

Точка физического маятника, расположенная на расстоянии  $l_{пр}$  от точки подвеса на прямой, проходящей через центр тяжести,

называется центром качания. Центр качания и точка подвеса взаимно обратимы, т. е. если их поменять местами, период колебания физического маятника не изменится.

Как видно из (4), величина периода колебаний исследуемого маятника определяется величиной  $l_{\text{пр}}$ , которая (3) является сложной функцией  $a$ . Из анализа этой функции на экстремумы следует, что ее минимум будет при  $a=a_0((l_{\text{пр}})_{\text{min}} \rightarrow 2a_0)$ , а максимум будет при  $a \rightarrow 0 ((l_{\text{пр}}) \rightarrow \infty)$ . При  $a=0$  маятник будет находиться в состоянии безразличного равновесия.

Рассмотренная теория физического маятника является приближенной. В ней сделан ряд допущений, которые нуждаются в дополнительном анализе.

Первое из них заключается в использовании приближения малых амплитуд, т. е.  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Если использовать следующий член в разложении  $\sin \alpha = \alpha - (1/3)\alpha^3 + \dots$ , то период колебания маятника будет зависеть от амплитуды. Заранее указать величину амплитуды, при которой можно пользоваться линейным приближением (8.14), невозможно, так как критерий выбора зависит от точности метода измерения периода.

Второе допущение заключается в пренебрежении в (8.14) моментом сил трения. В правомочности такого допущения можно убедиться, оценив декремент затухания маятника (см. гл. XII). Действительно, для установок, используемых в лабораторной работе, маятник совершает более  $N=100$  колебаний, пока его амплитуда не уменьшится в  $e$  ( $\sim 3$ ) раз. В этом случае относительное изменение периода колебаний за счет сил трения будет  $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{4\pi^2 N^2} \approx 10^{-6}$ , и этой величиной можно пренебречь.

Третье допущение заключается в пренебрежении массой подвижной шайбы с опорными призмами по сравнению с массой самого стержня. Учет этой массы приводит к тому, что центр тяжести маятника не будет совпадать с геометрическим центром стержня и его положение будет меняться при изменении точки подвеса  $a$ . Правомочность этого допущения проверяется экспериментально по отклонению полученных результатов от результатов, рассчитанных по приведенной выше упрощенной теории.

**Измерения.** 1. Опорную призму укрепляют на конце маятника на крайнем делении шкалы. Устанавливают диапазон амплитуд, в пределах которого период колебания маятника можно считать независимым от амплитуды. Для этого отклоняют маятник примерно на  $15^\circ$  и измеряют при помощи фотоэлектрической системы период его колебания. Затем постепенно уменьшают амплитуду до тех пор, пока измеряемые периоды колебаний перестанут отличаться друг от друга в пределах случайных ошибок эксперимента.

2. Исследование зависимости периода колебаний  $T$  от величины  $a$ . После получения экспериментальной зависимости строят график зависимости  $a \cdot T^2$  от величины  $a^2$ . Методом наименьших

квадратов аппроксимируют полученную зависимость прямой линии и находят из графика величины  $a_0^2$  и  $4\pi^2 a_0^2/g$ . Вычисляют значение  $a_0$  и сравнивают его с определенным из непосредственных измерений  $a_0 = L/\sqrt{12}$ . Вычисляют значение  $g$  и сравнивают его с табличным значением.

3. Для 2—3 значений  $a$  вычисляют значение  $l_{\text{пр}}$  и на опыте проверяют обратимость точки подвеса и точки качания.

*Литература:* [1] — § 21, 34; [2] — § 41; [3] — § 90.

### *Лабораторная работа 3*

#### **Определение ускорения свободного падения при помощи обратного маятника (метод Бесселя)**

Точное измерение периода колебаний любого физического маятника позволяет в принципе определить ускорение свободного падения  $g$  в любой точке земного шара. Эти методы определения  $g$  основаны на зависимости периода колебаний  $T$  от  $g$  по формуле (см. Введение (8.12) — (8.18))

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}}, \quad (1)$$

где  $T$  — период колебания маятника,  $J$  — момент инерции маятника относительно точки подвеса маятника,  $J_0$  — момент инерции маятника относительно центра масс (см. теорему Гюйгенса—Штейнера),  $a$  — расстояние от центра масс до точки подвеса,  $m$  — масса маятника.

Если использование произвольных физических маятников удобно для определения вариаций  $g$ , т. е. нахождения отношений значений  $g$  в различных точках поля тяготения, то при определении самого значения  $g$  возникает трудность точного определения момента инерции маятника.

Это затруднение исключено в методе обратного маятника, в котором из расчетных формул исключается величина момента инерции маятника  $J_0$ .

Этот метод основан на известном свойстве двух точек физического маятника, точки подвеса и точки качания, при последовательном подвешивании маятника в которых его период остается неизменным. Расстояние между этими точками определяется приведенной длиной физического маятника  $l_{\text{пр}}$ .

Таким образом, если у физического маятника найдены две сопряженные точки, когда периоды колебаний на них  $T_1$  и  $T_2$  точно совпадают, то для определения  $g$  необходимо точно измерить  $T_0 = T_1 = T_2$  и  $l_{\text{пр}}$ , равное расстоянию между этими точками

$$g = \frac{4\pi^2}{T_0^2} l_{\text{пр}}. \quad (2)$$

Однако экспериментально найти эти точки с необходимой точностью достаточно сложно, и практически всегда  $T_1 \neq T_2$ .

В этом случае

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma_1^2}{mga_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma_2^2}{mga_2}}. \quad (3)$$

Из (3) легко получить

$$T_1^2 ga_1 - T_2^2 ga_2 = 4\pi^2 (a_1^2 - a_2^2),$$

откуда

$$g = 4\pi^2 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2} = \frac{4\pi^2 L}{T_0^2}, \quad (4)$$

где  $L = a_1 + a_2$ , а

$$T_0^2 = \frac{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2}{a_1 - a_2} = T_1^2 + \frac{a_2}{a_1 - a_2} (T_1^2 - T_2^2). \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что ошибка в измерении  $g$  будет минимальной, тогда  $T_1$  и  $T_2$  близки друг к другу, а значения  $a_1$  и  $a_2$  существенно отличаются друг от друга.

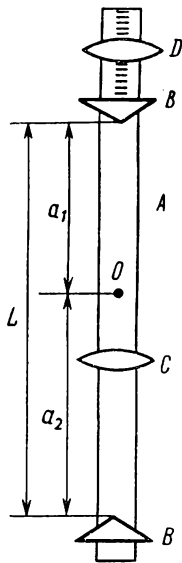


Рис. 8.3

В данной работе используется оборотный маятник, изображенный на рис. 8.3. На металлическом стержне  $A$  опорные призмы  $B$  жестко закреплены и не перемещаются. Расстояние между ними



$L$  фиксировано и его значение указано на стержне. Также фиксировано и положение чечевицы  $C$ . Вторая чечевица  $D$  находится на конце стержня (не между призмами) и может перемещаться по стержню, причем ее положение определяется по шкале с помощью нониуса. Центр масс маятника обозначен точкой  $O$ . Время половины периода определяется специальным электронным блоком. При отклонении маятника из положения равновесия маятник начинает движение и, проходя через положение равновесия, вырабатывает в фотоэлектрической системе электрический импульс, запускающий частотомер. Спустя полпериода, при повторном пересечении луча фотоэлектрической системы вырабатывается другой импульс, останавливающий действие частотомера. Интервал времени между этими импульсами высвечивается на табло частотомера.

На части установок практикума используется специальный электронный блок, состоящий из таймера и фотоэлектрической системы. Включение блока осуществляется нажатием клавиши «сеть». При нажатии клавиши «сброс» происходит «обнуление» табло электронного блока, а затем при первом же пересечении маятником светового луча фотоэлектрического датчика происходит запуск системы счета периодов и электронного таймера. После нажатия клавиши «стоп» очередное пересечение маятником светового луча, соответствующее завершению текущего периода колебаний, вызывает остановку таймера и системы счета периодов колебаний. Результат высвечивается на табло блока.

**Измерения.** Пользуясь системой отсчета времени, определяют периоды колебаний маятника для различных (не менее 10) положений чечевицы  $D$ . Для каждого положения чечевицы  $D$  период колебаний определяется 3—5 раз и в дальнейшем используется среднее значение этих измерений. По полученным результатам строят график зависимости периода колебаний от положения чечевицы  $D$ , откладывая по оси абсцисс деления шкалы, указывающие положение чечевицы  $D$ , по оси ординат — величину периода колебаний. После этого меняют ось колебания маятника, заставляя колебаться его на другой призме. В тех же пределах, с тем же числом измерений изучают зависимость периода колебаний от положения чечевицы  $D$ . Полученные результаты также наносятся на предыдущий график. По точке пересечения двух кривых определяют положение чечевицы  $D$ , при котором  $T_1 \approx T_2$ . Для этого положения чечевицы  $D$  дополнительно определяют периоды  $T_1$  и  $T_2$  с максимальной точностью (5—7 измерений).

Для определения  $a_1$  и  $a_2$  маятник снимают с консоли и осторожно укладывают его стержень на специальную подставку, имеющую острую призму. Передвигая маятник относительно ребра призмы, достигают равновесия и определяют положение центра тяжести маятника. При помощи линейки определяют расстояние от центра тяжести до призм маятника  $a_1$  и  $a_2$ .

По полученным данным определяют величину  $g$  и сравнивают полученный результат с табличными данными.

При выполнении работы следует помнить (см. введение), что приведенная теория верна лишь в приближении малых амплитуд колебания маятника, поэтому угол отклонения маятника при всех измерениях не должен превышать  $\sim 5^\circ$ .

*Литература:* [1] — § 21, 34; [2] — § 41; [3] — § 91.

#### *Лабораторная работа 4*

#### **Изучение вращательного движения твердого тела**

Цель задачи — экспериментальная проверка основного уравнения вращательного движения — уравнения моментов (см. введение).

Прибор (маятник Обербека), применяемый в настоящей работе, изображен схематически на рис. (8.4). Он состоит из четырех

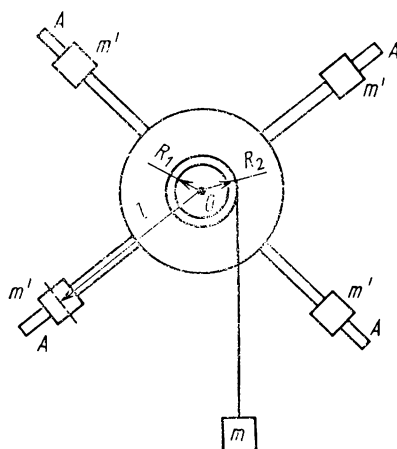


Рис. 8.4

стержней  $A$  и двух шкивов различного радиуса  $R_1$  и  $R_2$ , укрепленных на одной горизонтальной оси  $O$ . По стержням могут перемещаться и закрепляться в нужном положении четыре груза одинаковой массы (по одному на каждом стержне). Маятник приводится в движение при помощи грузов различной массы, прикрепляемых к концу намотанной на тот или иной шкив нити. Измерение времени опускания груза производится с помощью секундомера (вариант 1) или с помощью электронного блока, содержащего таймер и фотозлектрическую систему запуска и остановки таймера (вариант 2).

Пренебрегая силами трения, можем написать уравнение вращательного движения маятника

$$J \varepsilon = M = R \cdot T, \quad (1)$$

уравнение поступательного движения груза на нити

$$ma = mg - T, \quad (2)$$

уравнение кинематической связи

$$a = \varepsilon \cdot R, \quad (3)$$

здесь  $R$  — радиус шкива,  $T$  — натяжение нити,  $a$  — ускорение груза на нити,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $J$  — момент инерции маятника,  $\varepsilon$  — его угловое ускорение,  $M$  — момент внешних сил,  $m$  — масса груза.

Эти уравнения дают постоянное во времени значение величины ускорения  $a = mR^2 / (J + mR^2) \cdot g$ , это ускорение может быть также найдено из уравнения

$$a = \frac{2h}{t^2}, \quad (4)$$

где  $h$  — расстояние, проходимое грузом за время  $t$ . В условиях лабораторной работы  $h$  является постоянной величиной.

Уравнение моментов (1) в ходе выполнения работы проверяется двумя способами.

**1-й способ.** В этом случае момент инерции маятника фиксирован, а момент сил изменяется.

Из уравнения (1) имеем

$$\frac{M_1}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{\varepsilon_2} = J. \quad (5)$$

Из уравнений (1) — (5) следует равенство

$$m_1 R_1^2 (gt_1^2 - 2h) = m_2 R_2^2 (gt_2^2 - 2h). \quad (6)$$

В уравнение (6) входят величины, определяемые экспериментально.

**2-й способ.** В этом случае являются неизменными масса груза и радиус шкива, моменты инерции маятника изменяются.

По теореме Гюйгенса—Штейнера о параллельном переносе осей моментов инерции имеем

$$J_1 = J_0 + m' l^2, \quad (7)$$

где  $J_0$  — момент инерции тела массы  $m'$  относительно оси, проходящей через центр масс тела,  $J_1$  — момент инерции того же тела относительно параллельной оси, удаленной на расстояние  $l$  от прежней.

Пусть  $J'_0$  — момент инерции всех четырех грузов массы  $4m'$  относительно оси, проходящей через их центры масс. При удале-

нии их центров на расстояние  $l_1$  от прежней их оси момент инерции  $J_1$  будет равен

$$J_1 = J_0^1 + 4m'l_1^2.$$

Если  $J_0$  — момент инерции маятника без грузов, то полный момент инерции маятника будет

$$J'_1 = J_0 + J'_0 + 4m'l_1^2. \quad (8a)$$

При удалении центров масс грузов на расстояние  $l_2$  соответственно имеем

$$J'_2 = J_0 + J'_0 + 4m'l_2^2. \quad (8б)$$

Если  $l_1 > l_2$ , то

$$J'_1 - J'_2 = 4m'(l_1^2 - l_2^2). \quad (9)$$

Из уравнений (1) и (9) следует

$$\frac{M_1}{\varepsilon_1} - \frac{M_2}{\varepsilon_2} = 4m'(l_1^2 - l_2^2). \quad (10)$$

Подставляя уравнение (10) в (1) — (4), получаем

$$t_1^2 - t_2^2 = 8h \frac{m'}{m} \frac{l_1^2 - l_2^2}{R^2 g}. \quad (11)$$

В это уравнение входят величины, определяемые экспериментально.

Уравнения (6) и (11) получены без учета силы трения в оси маятника и силы трения о воздух. При вращательном движении маятника наибольшую роль играет момент силы трения в оси маятника (момент силы трения о воздух незначителен). Величина силы трения в оси при небольших угловых скоростях вращения маятника является практически постоянной величиной, равной моменту силы трения покоя. Это позволяет (см. ниже) произвести оценку этой величины. Чем меньше по сравнению с моментом силы натяжения нити момент силы трения, тем точнее при прочих равных условиях будут выполняться уравнения (6) и (11).

**Измерения.** Перед началом выполнения работы следует включить электронный блок нажатием клавиши «сеть». Затем нажатием клавиши «сброс» производят обнуление табло электронного блока. При отжатой клавише «пуск» маятник заторможен и не может вращаться под действием груза на нити. Нить наматывают на шкив радиуса  $R_1$  и устанавливают груз в такое положение, чтобы его нижняя грань была на уровне риски на боковой грани верхнего фотоэлектрического датчика. Нажимают клавишу «пуск», в результате чего выключается блокировка маятника и начинается движение. Пересечение грузом световых пучков верхнего и нижнего датчиков соответственно включает и останавливает таймер

(а также вновь включает блокировку). На табло высвечивается время  $t$  прохождения грузом расстояния  $h$ . Для сброса показаний нажимают на клавишу «сброс».

Выполнение работы начинается с измерения следующих величин: высоты  $h$  опускания груза на нити (по шкале прибора — это расстояние между рисками на боковых поверхностях фотоэлектрических датчиков) и радиусов  $R_1$  и  $R_2$  шкивов (штангенциркулем). Измерение величин  $R_1$ ,  $R_2$  необходимо произвести не менее трех раз. За истинную величину принимают среднее арифметическое значение полученных величин. После этого грузы на стержнях маятника укрепляют в самом ближнем положении от оси маятника. По делениям на стержнях измеряют расстояние от середины каждого груза до оси вращения маятника.

При проверке уравнений (6) и (11) на конец нити, намотанной на шкив, прикрепляют поочередно три разных груза (массы указаны на используемых для этих целей грузиках), измеряя время опускания каждого из грузов 5-7 раз, определяют среднее арифметическое.

После этого нить перебрасывают на другой шкив (радиуса  $R_2$ ), на конец нити прикрепляют груз  $m_1$  и совершенно так же определяют время опускания груза  $m_1$  с высоты  $h$ . По полученным данным убеждаются в справедливости, в пределах ошибок измерения, уравнения (6), а следовательно, и уравнения (1).

Для выполнения проверки уравнения (1) вторым способом все грузы закрепляют симметрично в новом положении, наиболее удаленном от оси маятника. Совершенно так же, как раньше определяли величину  $l_2$ , определяют величину  $l_1$  (расстояние от середины каждого груза на стержнях до оси маятника). В этих условиях проводят те же измерения, что и раньше. Вновь убеждаются в справедливости формулы (6). Пользуясь полученным экспериментальным материалом, убеждаются (в пределах ошибок измерения) в правильности уравнения (11), а следовательно, уравнения (10) и (1). Массы грузов — известные величины и указаны непосредственно на грузах.

Для оценки величины момента сил трения в оси маятника поступают следующим образом.

К концу нити, намотанной на тот или иной шкив, прикрепляют груз, постепенно увеличивая его до тех пор, пока маятник не начнет вращаться. Не менее трех раз находят наименьшее значение такого груза. За истинное значение принимают среднее арифметическое из полученных величин.

Произведение полученного веса на радиус шкива дает возможность судить о величине момента сил трения в оси маятника.

Необходимо определить относительную ошибку, допускаемую при пренебрежении силами трения. Для этого следует взять отношение величины момента силы трения к величине наименьшего момента силы натяжения нити.

*Литература:* [1] — § 31, 32; [2] — § 30, 35.

## Лабораторная работа 5

### Определение момента инерции и проверка теоремы Гюйгенса — Штейнера методом крутильных колебаний

Целью задачи является проверка теоремы Гюйгенса — Штейнера и определение момента инерции с помощью крутильных колебаний трифилярного подвеса.

Трифиллярный подвес представляет собой круглую платформу, подвешенную на трех симметрично расположенных нитях, укрепленных у краев этой платформы (рис. 8.5). Наверху эти нити также симметрично прикреплены к диску несколько меньшего диаметра, чем диаметр платформы.

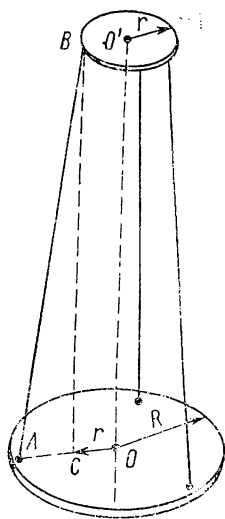


Рис. 8.5

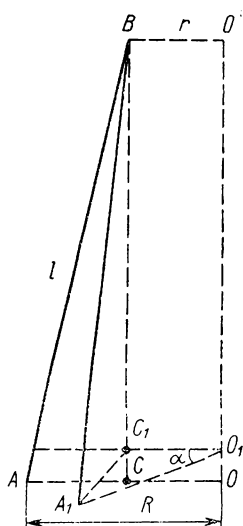


Рис. 8.6

Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, перпендикулярной к ее плоскости и проходящей через ее середину; центр тяжести платформы при этом перемещается по оси вращения. Период колебаний определяется величиной момента инерции платформы; он будет другим, если платформе нагрузить каким-либо телом; этим и пользуются в настоящей работе.

Если платформа массы  $m$ , вращаясь в одном направлении, поднялась на высоту  $h$ , то приращение потенциальной энергии будет равно

$$E_1 = mgh,$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести. Вращаясь в другом направлении,

платформа придет в положение равновесия с кинетической энергией, равной

$$E_2 = \frac{1}{2} J \omega_0^2;$$

где  $J$  — момент инерции платформы,  $\omega_0$  — угловая скорость платформы в момент достижения ею положения равновесия. Пренебрегая работой сил трения, на основании закона сохранения механической энергии имеем

$$E_1 = E_2, \quad mgh = \frac{1}{2} J \omega_0^2. \quad (1)$$

Считая, что платформа совершает гармонические колебания, можем написать зависимость углового смещения платформы от времени в виде

$$\beta = \alpha \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

где  $\beta$  — угловое смещение платформы,  $\alpha$  — амплитуда смещения,  $T$  — период колебания,  $t$  — текущее время. Угловая скорость, являющаяся первой производной  $\beta$ , по времени выражается так:

$$\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{2\pi\alpha}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

В момент прохождения через положение равновесия ( $t = 0, 1/2 T, 3/2 T$  и т. д.) абсолютное значение этой величины будет

$$\omega_0 = \frac{2\pi\alpha}{T}. \quad (2)$$

На основании выражений (1) и (2) имеем

$$mgh = \frac{1}{2} J \left( \frac{2\pi\alpha}{T} \right)^2. \quad (3)$$

Если  $l$  — длина нитей подвеса,  $R$  — расстояние от центра платформы до точек крепления нитей на ней,  $r$  — радиус верхнего диска, то легко видеть (рис. 8.6), что

$$h = OO_1 = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}.$$

Так как

$$\begin{aligned} (BC)^2 &= (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R - r)^2, \\ (BC_1)^2 &= (BA_1)^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha), \end{aligned}$$

то

$$h = \frac{2Rr(1 - \cos \alpha)}{BC + BC_1} = \frac{4Rr \sin^2 \alpha / 2}{BC + BC_1}.$$

При малых углах отклонения  $\alpha$  значение синуса этого угла можно заменить просто значением  $\alpha$ , а величину знаменателя при выполнении условия  $(R - r) \ll BC$  положить равной  $2l$ . Учитывая это, получаем

$$h = \frac{R \cdot r \alpha^2}{2l}.$$

Тогда на основании (3)

$$mg \frac{Rr\alpha^2}{2l} = \frac{1}{2} J \left( \frac{2\pi\alpha}{T} \right)^2,$$

откуда

$$J = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2. \quad (4)$$

По формуле (4) может быть определен момент инерции и самой платформы, и тела, положенного на нее, так как все величины в правой части формулы могут быть непосредственно измерены.

Вращательный импульс, необходимый для начала крутильных колебаний, сообщается платформе путем поворота верхнего диска вокруг его оси при помощи натяжения шнура, приводящего в движение рычажок, связанный с диском. Этим достигается почти полное отсутствие других искрутильных колебаний, наличие которых затрудняет измерения.

Для удобства отсчета колебаний на платформе имеется метка, против которой при покоящейся платформе устанавливается указатель — стержень на подставке.

**Измерения.** Сначала определяют по формуле (4) момент инерции пустой платформы  $J_0$ . Так как величины  $l$ ,  $R$ ,  $r$  и масса платформы  $m_0$  даются как постоянные прибора, то определяют только время периода колебаний пустой платформы  $T_0$ . Для этого сообщают платформе вращательный импульс и при помощи секундомера измеряют время некоторого числа (50—100) полных колебаний, что дает возможность достаточно точно определить величину периода  $T_0$ .

После этого платформу нагружают исследуемым телом, масса которого должна быть предварительно определена путем взвешивания, и вновь определяют период колебания  $T$  всей системы. Затем, пользуясь формулой (4), вычисляют момент инерции  $J_1$  всей системы, принимая ее массу  $m$  равной сумме масс тела и платформы. Величина момента инерции тела  $J$  определяется как разность

$$J = J_1 - J_0.$$

При помощи трифилярного подвеса может быть проверена и теорема Гюйгенса — Штейнера, для чего необходимо иметь два совершенно одинаковых тела. Сначала определяют момент инерции этих тел, положив их одно на другое в центре платформы.



Затем оба тела располагают симметрично на платформе и определяют их момент инерции при таком расположении. Половина этой величины и будет давать момент инерции одного тела, находящегося на фиксированном расстоянии от оси вращения. Зная это расстояние, массу тела и момент инерции тела, положенного в центре платформы, можно проверить указанную теорему.

Тела на платформу необходимо класть строго симметрично, так, чтобы не было перекоса платформы, для чего на платформе нанесены концентрические окружности на определенном расстоянии друг от друга. При измерениях недопустимо пользоваться амплитудами колебаний, большими  $5-6^\circ$ .

*Литература:* [1] — § 31; [2] — § 35, 42.

### *Лабораторная работа 6*

#### **Измерение момента инерции колеса**

Уравнение вращательного движения для материального тела имеет вид (см. введение к главе 8)

$$J \varepsilon = M, \quad (1)$$

где  $J$  — момент инерции тела,  $\varepsilon$  — его угловое ускорение,  $M$  — момент приложенных к телу сил.

Величина момента инерции относительно какой-либо оси определяется пространственным распределением элементарных масс тела — геометрией масс (см. введение). При сложной форме поверхности, ограничивающей тело, и неравномерном распределении плотности аналитический расчет величины момента инерции может быть достаточно сложной задачей. Экспериментальное же определение момента инерции осуществимо легко. В настоящей задаче измеряется момент инерции велосипедного колеса двумя различными способами.

#### *УПРАЖНЕНИЕ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МЕТОДОМ КОЛЕБАНИЙ*

**Описание установки и измерения.** Велосипедное колесо  $A$  (рис. 8.7) может вращаться с малым трением вокруг горизонтальной оси  $O$ . На внутренней стороне обода колеса симметрично по диаметру укреплены две очень легкие и одинаковые по весу короткие трубки  $B$ . К колесу на нити прикреплен металлический шар  $C$ .

Помещая шар в одну из трубок, получаем физический маятник, который может колебаться вокруг положения равновесия, отклоняясь влево и вправо от вертикали, проходящей через ось колеса. Угол отклонения может быть определен по угломерной шкале  $D$ .

Пренебрегая моментом сил трения, можем написать уравнение движения колеса вместе с шариком

$$(J_x + J) \ddot{\varphi} = -mgL \sin \varphi, \quad (1)$$

где  $J_x$  — момент инерции колеса с трубками,  $J$  — момент инерции шарика относительно оси колеса,  $m$  — масса шарика,  $L$  — расстояние между центром шарика и осью колеса,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\varphi$  — угол отклонения колеса от положения равновесия,  $\ddot{\varphi}$  — угловое ускорение колеса.

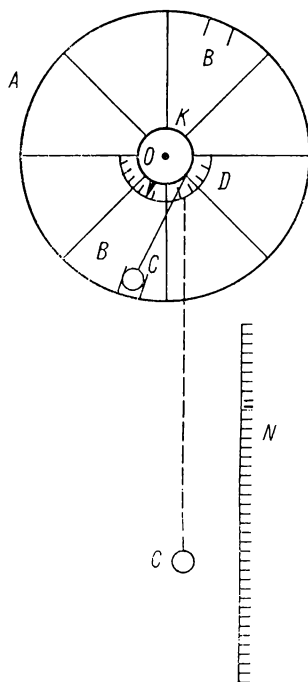


Рис. 8.7

Если  $\sin \varphi \approx \varphi$  (малые углы отклонения), то можно написать

$$(J_x + J) \cdot \ddot{\varphi} = -mgL\varphi. \quad (2)$$

Зная, что движение является периодическим, будем искать решение (2) в виде

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t, \quad (3)$$

где  $\omega = 2\pi/T$  — циклическая частота,  $T$  — период колебаний колеса,  $\varphi_0$  — амплитуда колебаний.

Дважды дифференцируя уравнение (3) по времени, получаем

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi. \quad (4)$$

Сопоставляя (2) и (4), находим

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgL}{J_x + J}. \quad (5)$$

Учитывая, что диаметр шарика во много раз меньше радиуса колеса, можем считать шарик материальной точкой и положить

$$J = mL^2. \quad (6)$$

Тогда из уравнений (5) и (6) получаем

$$J_x = mL \left( \frac{gT^2}{4\pi} - L \right). \quad (7)$$

Вычисление момента инерции колеса по этой формуле требует измерения массы шарика, периода колебаний и расстояния от оси вращения до центра шарика.

Масса шарика  $m$  определяется взвешиванием, период колебаний  $T$  — секундомером, расстояние  $L$  — миллиметровой линейкой.

Сначала тщательно взвешивают шарик. После этого не менее трех раз измеряют расстояние от оси вращения до центра шарика. Вычисляют среднее арифметическое этой величины.

Шарик помещают в одну из трубок, колесо отклоняют от его положения равновесия на угол, не превышающий  $8^\circ$ . Определяют по секундомеру время 30 полных колебаний. Вычисляют среднее арифметическое значение одного полного периода колебаний. По полученным данным, пользуясь уравнением (7), вычисляют момент инерции колеса.

## УПРАЖНЕНИЕ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МЕТОДОМ ВРАЩЕНИЯ

**Описание установки и измерения.** Велосипедное колесо  $A$  может вращаться с малым трением вокруг горизонтальной оси  $O$ . Колесо имеет соосный с ним цилиндр  $K$ , на который наматывается нить с прикрепленным к ней грузом — шариком  $C$ .

Под действием силы тяжести шарик будет опускаться, приводя колесо во вращение. Уравнения движения системы без учета сил трения имеют вид

$$ma = mg - T, \quad J_x \varepsilon = Tr, \quad a = \varepsilon r, \quad (8)$$

где  $m$  — масса шарика,  $J_x$  — момент инерции колеса с трубками  $B$  (см. рис. 1),  $g$  — ускорение силы тяжести,  $T$  — натяжение нити,  $r$  — радиус цилиндра, на который намотана нить.

Из уравнений (8) получаем

$$a = \frac{mg}{m + (J_x/r^2)}. \quad (9)$$

Учитывая, что ускорение  $a$  шарика при опускании нити на полную длину  $h$  определяется уравнением  $h=at^2/2$ , получаем окончательно

$$J_x = mr^2 \left( \frac{g}{2h} t^2 - 1 \right). \quad (10)$$

Вычисление момента инерции по этой формуле требует измерения массы груза (шарика)  $m$ , радиуса цилиндра  $r$ , расстояния  $h$ , проходимого опускающимся шариком, времени  $t$  опускания шарика. Масса шарика определяется взвешиванием, радиус определяется штангенциркулем (используется среднее арифметическое значение из многих замеров), время опускания  $t$  измеряется секундомером,  $h$  определяется по шкале  $N$ . По полученным данным, пользуясь уравнением (10), вычисляют момент инерции колеса.

Найденное значение  $J_x$  необходимо сопоставить с величиной, получающейся из уравнения (7) (см. упражнение 1).

При выводе соотношения (10) пренебрегали силой трения. Рассмотрим соотношения, получающиеся при учете сил трения.

При опускании шарика с высоты  $h$  (на полную длину нити) его потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию системы и работу против сил трения.

$$mgh = E + \varphi M,$$

где  $M$  — момент сил трения,  $\varphi$  — полный угол поворота колеса,  $E$  — кинетическая энергия системы. Предполагается, что сила трения при движении остается постоянной, т. е. не зависит от скорости.

После того как шарик опустится на полную длину нити  $h$ , колесо будет продолжать вращаться, и нить начнет наматываться на цилиндр. В результате шарик поднимется на максимальную высоту  $h' < h$ . Очевидно

$$E = mgh_1 + \varphi_1 \cdot M,$$

где  $\varphi_1$  — полный угол поворота колеса при подъеме шарика.

Учитывая, что  $h = r\varphi$ , а  $h_1 = r\varphi_1$ , получаем

$$M = \frac{mgr(h - h_1)}{h + h_1}. \quad (11)$$

Эта формула позволяет вычислить величину момента силы трения. Считая его известным, можем вместо системы уравнений (8) записать

$$ma = mg - T, \quad J_x \varepsilon = Tr - M, \quad a = \varepsilon r, \quad (12)$$

где по-прежнему  $a=2h/t^2$ . Уравнения (13) и (14) дают

$$J_x = mr^2 \left[ g \frac{t^2}{2h} \left( 1 - \frac{h-h_1}{h+h_1} \right) - 1 \right]. \quad (13)$$

Этим выражением пользуются для вычисления момента инерции колеса с учетом сил трения.

*Литература:* [1] — § 31, 32; [2] — § 30.

## Лабораторная работа 7

### Изучение эллипсоида инерции твердых тел

**Принадлежности:** 1) установка, 2) секундомер, штангенциркуль.

**Теория.** Рассмотрим твердое тело, закрепленное таким образом, что оно может вращаться вокруг неподвижного центра масс. Введем декартову систему координат с началом в центре масс. Бесконечно малый  $i$ -й элемент тела, имеющий координаты  $x_i, y_i, z_i$ , будет иметь скорость  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ , где  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор угловой скорости, описывающий вращение твердого тела, а  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку, где находится  $i$ -й элемент. Пусть масса этого элемента равна  $\Delta m_i$ . Момент импульса тела относительно центра масс будет равен

$$\mathbf{L} = \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i \Delta m_i (\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega})). \quad (1)$$

Расписывая (1) по проекциям на координатные оси, получим

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z, \\ L_y &= J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z, \\ L_z &= J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z, \end{aligned} \quad (2)$$

где шесть величин

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \sum_i \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_{yy} = \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad J_{zz} = \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2), \\ J_{xy} &= J_{yx} = - \sum_i \Delta m_i x_i y_i, \quad J_{xz} = J_{zx} = - \sum_i \Delta m_i x_i z_i, \\ J_{yz} &= J_{zy} = - \sum_i \Delta m_i y_i z_i \end{aligned}$$

определяют тензор инерции.

Величины  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}$  являются диагональными элементами тензора и называются осевыми моментами инерции.  $J_{xy}, J_{yx}, J_{xz}, J_{zx}, J_{yz}, J_{zy}$  являются недиагональными элементами тензора и называются центробежными моментами инерции. Тензор, обладаю-

щий указанной симметрией, ( $J_{xy}=J_{yx}$ , ...), называется симметричным тензором. Симметричный тензор можно привести к диагональному виду, т. е. выбрать такую систему координат, определяемую формой и положением тела, в которой все недиагональные элементы будут равны нулю. Соответствующие направления координатных осей называются главными осями инерции, а величины  $J_x \equiv J_{xx}$ ,  $J_y \equiv J_{yy}$ ,  $J_z \equiv J_{zz}$  — главными моментами инерции.

Если твердое тело вращается вокруг закрепленной оси, то удобно представить  $\mathbf{r}_i = \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\rho}_i$ , где  $\mathbf{d}_i \parallel \boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\rho}_i \perp \boldsymbol{\omega}$  (вектор  $\boldsymbol{\omega}$  направлен вдоль оси в соответствии с правилом правого винта). В этом случае скорость  $i$ -го элемента  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$ . При рассмотрении этого случая вводится понятие момента импульса относительно фиксированной оси. Если ось проходит через центр масс, то соответствующий момент импульса равен

$$\sum \Delta m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{v}_i = \sum \Delta m_i \boldsymbol{\rho}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) = \sum \Delta m_i \rho_i^2 \boldsymbol{\omega} = J \boldsymbol{\omega}, \quad (3)$$

где

$$J = \sum \Delta m_i \rho_i^2 \quad (4)$$

является моментом инерции относительно оси, определяющей направление вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ . Чтобы выразить момент инерции  $J$  через координаты  $i$ -го элемента, введем направляющие косинусы

$$\cos \alpha = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos \beta = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos \gamma = \frac{\omega_z}{\omega} \quad (\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}) \quad (5)$$

и представим  $\rho_i^2 = r_i^2 - d_i^2$ . Рассмотрим  $d_i^2$

$$d_i^2 = \left( \mathbf{r}_i \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right)^2 = (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2. \quad (6)$$

Учитывая (6) и тождество  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , представим  $J$  в виде

$$J = \sum \Delta m_i ((x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2). \quad (7)$$

Группируя в (7) члены по степеням косинусов, получим

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma. \quad (8)$$

В соотношении (8) компоненты тензора  $J_{xx}$ ,  $J_{xy}$  и т. д. при вращении тела меняют свою величину, так как они определяются с помощью неподвижной системы координат, а не системой координат, связанной с телом. Если ввести такую систему координат, для которой в некоторый момент времени тензор инерции принимает диагональный вид, то для этого момента времени получим

$$J = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (9)$$

С другой стороны, как следует из определения (4),  $J$  не меняется при вращении тела. Поэтому для определения  $J$  по формуле (8) можно брать любой момент времени, в частности и тот, в который система координат, связанная с телом, совпадает с некоторой неподвижной системой, т. е. в (8) можно рассматривать  $J_{xx}$ ,  $J_{xy}$  и т. д., определенными в некоторой системе координат, связанной с телом.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию соотношения (8). Введем декартову систему координат и для каждого значения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  отложим по осям  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  величины

$$x = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{J(\alpha, \beta, \gamma)}}, \quad y = \frac{\cos \beta}{\sqrt{J(\alpha, \beta, \gamma)}}, \quad z = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{J(\alpha, \beta, \gamma)}}. \quad (10)$$

Множество точек с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  определяют некоторую поверхность. Чтобы найти уравнение этой поверхности, подставим в (8) направляющие косинусы, выраженные через  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :  $\cos \alpha = x\sqrt{J}$ ,  $\cos \beta = y\sqrt{J}$ ,  $\cos \gamma = z\sqrt{J}$ . При этом получим уравнение поверхности второго порядка

$$J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 + 2J_{xy}xy + 2J_{xz}xz + 2J_{yz}yz = 1. \quad (11)$$

Из вида уравнения следует, что рассматриваемая поверхность является эллипсоидом. Этот эллипсоид называется эллипсоидом инерции. С помощью этого эллипсоида легко определить значение момента инерции, если заданы направляющие косинусы оси. Проведем из центра эллипсоида вектор с направляющими косинусами  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ . Длина этого вектора до пересечения с поверхностью эллипсоида будет равна  $1/\sqrt{J}$ . Действительно,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}{J} = \frac{1}{J}. \quad (12)$$

**Описание установки.** Тело, для которого определяются моменты инерции, — однородный металлический параллелепипед (рис. 8.8.). Поместим начало координат в центр масс параллелепипеда, оси координат направим по его осям симметрии. Направим ось  $OX$  нормально к наибольшей по величине грани параллелепипеда, ось  $OY$  — нормально к средней грани, а ось  $OZ$  — нормально к наименьшей грани.

В середине каждой грани сделаны небольшие углубления для закрепления тела при его вращении вокруг осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ . Углубления сделаны также в местах, позволяющих укреплять тело при его вращении около осей  $MM_1$ ,  $MN_1$ ,  $DB_1$ .

Параллелепипед неподвижно укрепляется в рамке, которая подвешена на упругой металлической проволоке и может совершать крутильные колебания. В состав установки входят также электронный таймер и фотоэлектрическая система, регистрирующая число полных периодов колебания рамки.

Уравнение вращательного движения рамки с исследуемым параллелепипедом имеет вид

$$(J_0 + J) \ddot{\varphi} = -f\varphi, \quad (13)$$

где  $J_0$  — момент инерции рамки,  $J$  — момент инерции параллелепипеда относительно данной оси,  $f$  — модуль кручения проволоки,  $\varphi$  — угол отклонения рамки от положения равновесия. Решение этого уравнения — гармоническое колебание с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J}{f}}. \quad (14)$$

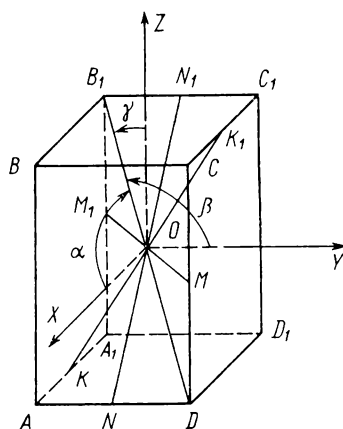


Рис. 8.8

Период колебаний рамки без параллелепипеда равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{f}}. \quad (15)$$

Из этих двух выражений

$$J = J_0 \left[ \left( \frac{T}{T_0} \right)^2 - 1 \right]. \quad (16)$$

Пользуясь этой формулой, можно определить моменты инерции тела  $J_{Ox}$ ,  $J_{Oy}$ ,  $J_{Oz}$ ,  $J$  (относительно главных осей координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  и произвольной оси, проходящей через центр главной системы координат), выразив их соответственно через периоды колебаний  $T_{Ox}$ ,  $T_{Oy}$ ,  $T_{Oz}$  и  $T$ .

Пусть размер параллелепипеда по оси  $Ox$  равен  $a$ , а по оси  $Oy$  равен  $b$ , по оси  $Oz$  равен  $c$ . Квадраты направляющих косинусов для его диагонали соответственно равны

$$\cos^2 \alpha = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \cos^2 \beta = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \cos^2 \gamma = \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (17)$$



Подстановка  $J_x, J_y, J_z$ , выраженных через  $T_{Ox}, T_{Oy}, T_{Oz}$  по формуле (16), и косинусов, выраженных через  $a, b, c$  по формулам (17), в соотношение (9) приводит к уравнению

$$T^2 = \frac{T_{Ox}^2 a^2 + T_{Oy}^2 b^2 + T_{Oz}^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (18)$$

Соотношение (18) проверяется экспериментально.

**Измерения.** Для выполнения работы необходимо измерить: 1) размеры тела (ребра параллелепипеда) —  $a, b, c$ ; 2) период колебаний пустой рамки ( $T_0$ ) и рамки с телом, закрепленным в различных положениях. Измерения рекомендуется проводить в следующем порядке. Сначала штангенциркулем измеряют величины  $a, b, c$  не менее трех раз в разных сечениях тела и берут для каждой из них среднее арифметическое. Затем вычисляют их квадраты и сумму квадратов.

Для измерения периода колебаний  $T_0$  необходимо включить электронную часть прибора нажатием клавиши «сеть». Затем необходимо нажать на клавишу «сброс» для обнуления табло прибора и отжать клавишу «пуск», в результате чего будет включена цепь питания электромагнита, фиксирующего рамку в отклоненном положении. Зафиксировав рамку в отклоненном положении с помощью электромагнита, нажимают клавишу «пуск», которая замыкает цепь питания электромагнита, включает электронный таймер и фотоэлектронную систему регистрации числа полных периодов колебаний. Нажатие на клавишу «стоп» останавливает работу электронной системы после завершения очередного периода колебаний. Период колебаний  $T_0$  получают путем деления времени, зафиксированного на табло таймера, на число  $N$  периодов колебаний, зафиксированного на табло фотоэлектронной системы. Число периодов  $N$  рекомендуется задавать таким, чтобы относительная ошибка измерения периода  $T_0$  была мала по сравнению с ошибками измерения других величин.

После этого закрепляют в рамке параллелепипед в разных положениях и измеряют так же, как и прежде, периоды  $T_{Ox}, T_{Oy}, T_{Oz}, T$ . По полученным данным убеждаются в правильности (в пределах погрешности измерений) уравнения (18), а следовательно, и уравнения (9). Пользуясь уравнением (16), вычисляют моменты инерции параллелепипеда для осей  $Ox, Oy, Oz$  (в единицах момента инерции  $J_0$ ). Полученные значения моментов инерции сопоставляются между собой.

*Литература:* [1] — § 31, 32; [2] — § 53; [3] — § 92, 94; [4] — § 59.

## Лабораторная работа 8

### Изучение прецессии гироскопа

**Принадлежности:** гироскоп, электронный блок, в состав которого входят система измерения скорости вращения гироскопа, электронный таймер, фотоэлектрическая система отсчета угла поворота гироскопа вокруг вертикальной оси.

**Теория.** Гироскопом называется быстровращающееся твердое тело, ось которого может изменять свое направление в пространстве. Большие скорости вращения гироскопа требуют, чтобы ось гироскопа была осью симметрии. Подвижность оси гироскопа обеспечивается кардановым подвесом или каким-либо другим аналогичным устройством. При этом вращение оси гироскопа происходит таким образом, что некоторая точка  $O$  этой оси (например, центр масс гироскопа) остается неподвижной. При вращении оси соответствующая угловая скорость  $\Omega$  (скорость прецессии) много меньше угловой скорости вращения гироскопа вокруг своей оси, которую будем обозначать через  $\omega$ .

Если на ось гироскопа действует некоторая сила, создающая момент  $M$ , то момент импульса относительно точки  $O$  (главный момент импульса)  $L$  изменяется в соответствии с уравнением моментов

$$\frac{dL}{dt} = M. \quad (1)$$

Анализ уравнения (1) упрощается вследствие того, что угловая скорость вращения гироскопа очень большая. А это означает, что при относительно медленном изменении ориентации оси гироскопа главный момент импульса практически направлен по оси гироскопа. Момент внешних сил  $M$  направлен перпендикулярно оси гироскопа, т. е. практически перпендикулярно главному моменту импульса  $L$ . Приращение  $dL$  момента импульса должно быть направлено по моменту  $M$ , т. е. практически перпендикулярно моменту импульса  $L$ . Такое приращение вызовет изменение направления момента импульса  $L$ , т. е. изменение направления оси гироскопа. Если при этом ось поворачивается на угол  $\Omega dt$ , то соответствующее изменение момента импульса будет равно

$$|dL| = L\Omega dt. \quad (2)$$

Если при изменении направления оси на угол  $\Omega dt$  момент внешней силы повернется на такой же угол и не изменит своей величины, то ситуация в новом положении будет аналогична, т. е. произойдет такое же изменение направления оси вращения гироскопа за следующий интервал времени  $dt$ , т. е. под действием постоянного момента сил  $M$  возникнет вращение оси гироскопа с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . При этом изменение момента импульса  $L$  в единицу времени, равное  $L\Omega$ , будет определяться уравнением (1).

$$L\Omega = M. \quad (3)$$

Учитывая, что для быстро вращающегося гироскопа

$$L = J\omega, \quad (4)$$

где  $J$  — момент инерции гироскопа относительно его оси, получим для угловой скорости

$$\Omega = \frac{M}{J\omega}. \quad (5)$$

Вращение оси гироскопа с угловой скоростью  $\Omega$  под действием постоянного момента сил  $M$  называется прецессией гироскопа.

Отметим две особенности прецессионного движения. Во-первых, прецессия не обладает «инертностью» (прецессия существует, пока действует момент). Во-вторых, ось вращения прецессии не совпадает с направлением момента силы  $\mathbf{M}$ , а перпендикулярна ему (параллельно  $\mathbf{M}$  приращение  $\Delta \mathbf{L}$ ).

Цель задачи: а) ознакомление с особенностями движения гироскопа, б) определение угловой скорости прецессии и момента инерции гироскопа.

**Описание прибора.** Прибор (рис. 8.9) состоит из электрического моторчика  $A$ , укрепленного в обойме  $B$ . Обойма опирается на вертикальный стержень  $C$  и может вращаться вокруг горизонтальной

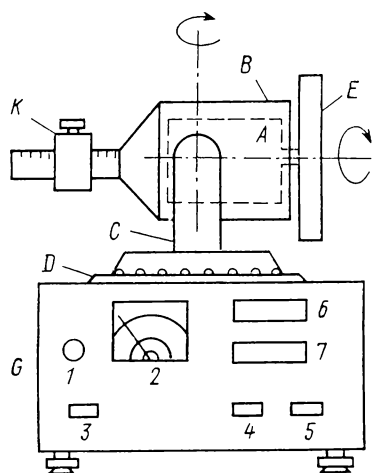


Рис. 8.9

оси, а вместе со стержнем — вокруг вертикальной. Собственно, гироскопом является ротор моторчика с массивным диском  $E$ . Момент внешних сил, приложенных к гироскопу, может изменяться при перемещении груза  $K$  по стержню обоймы. Прибор содержит также электронный блок  $G$ , в состав которого входят: система измерения скорости вращения моторчика, электронный таймер, фотоэлектрическая система измерения угла поворота гироскопа вокруг вертикальной оси.

Включение моторчика производится выведением ручки «скорость вращения» 1 из крайнего левого положения. Дальнейшее вращение этой ручки по часовой стрелке приводит к увеличению скорости вращения моторчика. Стрелочный прибор 2 на панели блока показывает скорость вращения моторчика.

Включение электронного таймера и фотоэлектрической системы измерения угла  $\varphi$  поворота гироскопа вокруг горизонтальной оси производится нажатием клавиши «сеть» 3. При нажатии на клавишу «сброс» 4 происходит обнуление табло электронного блока 6, 7. После нажатия на клавишу «сброс» происходит запуск фотоэлектрической системы измерения угла  $\varphi$  и электронного таймера в момент, когда световой пучок попадает на фотоэлемент системы через одну из прорезей на цилиндрической диафрагме  $D$ , поворачивающейся вместе с гироскопом вокруг вертикальной оси. После нажатия на клавишу «стоп» 5 происходит остановка измерений времени  $t$  и угла  $\varphi$  при очередном попадании светового пучка на фотоэлемент системы. Угловую скорость прецессии получают путем деления зафиксированного на табло 7 электронного блока значения угла  $\varphi$  на соответствующее время  $t$ .

**Измерения.** Груз  $K$  закрепляют на стержне обоймы так, чтобы весь прибор находился в безразличном равновесии, ось гироскопа устанавливают горизонтально. Включают моторчик и выжидают 2—3 минуты, пока ротор не начнет вращаться с номинальным числом оборотов. Смещением груза  $K$  создают момент силы тяжести  $M$ . Величина этого момента сил определяется по формуле  $M = Ph$ , где  $P$  — заданный вес груза,  $h$  — расстояние этого груза от его начального положения, измеряемого по шкале на стержне.

Далее измеряют величину угловой скорости прецессии при различных значениях момента  $M$  (при различных значениях плеча  $h$ ). Необходимо сделать 3—4 измерения для каждого значения скорости вращения ротора (рекомендуемые значения скорости вращения 2000, 4000 и 6000 оборотов в минуту). При устойчивой работе моторчика ( $\omega = \text{const}$ ) в пределах ошибок измерений должно соблюдаться условие

$$\frac{M_1}{\Omega_1} = \frac{M_2}{\Omega_2} = \dots = \frac{M_n}{\Omega_n} = L. \quad (6)$$

Пользуясь этим, определяют величину  $L$  — среднее арифметическое значение величины  $L$  для каждого значения скорости вращения ротора  $\omega$ . Далее вычисляют момент инерции гироскопа  $J = L/\omega$ . В пределах ошибок измерений значения  $J$  для всех  $\omega$  должны совпадать.

**Литература:** [1] — § 35; [2] — § 54; [3] — §§ 101—104; [4] — §§ 62—71.

**Введение. 1. Закон сохранения энергии.** Если на материальную точку, имеющую массу  $m$ , в каждой точке пространства действует сила, которая может быть представлена в виде градиента от некоторой функции  $U(x, y, z)$

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U, \quad (1)$$

то наряду с кинетической энергией  $mv^2/2$  можно ввести потенциальную энергию  $U$ , при этом будет сохраняться полная энергия  $E = mv^2/2 + U$ . Для доказательства этого утверждения рассмотрим уравнение движения этой материальной точки (II закон Ньютона)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } U(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Умножим левую и правую части уравнения (2) на  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$  и проинтегрируем. Учитывая, что

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \ddot{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}} v dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) dt = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}, \quad (3)$$

и

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \text{grad } U d\mathbf{r} = \int_{U(\mathbf{r}_1)}^{U(\mathbf{r}_2)} dU = U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1), \quad (4)$$

получим

$$\frac{mv_2^2}{2} + U(\mathbf{r}_2) = \frac{mv_1^2}{2} + U(\mathbf{r}_1). \quad (5)$$

Соотношение (5) выражает закон сохранения механической энергии для рассматриваемого случая. Условием потенциальности поля сил, т. е. условием выполнения (1), является обращение в ноль работы по замкнутому пути. Сама потенциальная функция  $U(\mathbf{r})$  определяется полем сил с точностью до константы. Эта константа может быть определена, если задать значение  $U$  в некоторой точке поля.

Простейшим примером потенциального поля является поле сил тяжести вблизи поверхности Земли. В этом случае во всех доста-

точно близких точках сила тяжести, действующая на данное тело, имеет одно и то же значение и направление, которое принимается за вертикаль. Если определить ось  $OZ$  по вертикали вверх, то в качестве потенциальной функции можно взять

$$U(z) = mgz. \quad (6)$$

В этом случае получим

$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = -mg. \quad (7)$$

Заменить твердое тело материальной точкой можно лишь в случае поступательного движения. Если тело вращается вокруг оси, проходящей через тело, или расположено вблизи тела, то отдельные элементы тела при этом будут иметь различные скорости и различные перемещения.

В качестве примера подобной ситуации рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Начало координат выберем на оси вращения тела. Ось  $OY$  направим вдоль оси вращения, радиус-вектор  $i$ -го элемента тела обозначим через  $\mathbf{r}_i$ , при этом  $\mathbf{r}_i = \mathbf{d}_i + \mathbf{\rho}_i$ , где  $\mathbf{d}_i$  — вектор параллельный оси, а  $\mathbf{\rho}_i$  — перпендикулярен оси. Будем предполагать, что на  $i$ -й элемент этого тела помимо силы тяжести, равной  $\Delta m_i g$  ( $\mathbf{g} = \{0, 0, -g\}$ ), действует сила  $\mathbf{F}_i$ , направленная по прямой, соединяющей эту точку с осью. Кроме того, предположим, что между  $i$ -м и  $j$ -м элементами действует сила взаимодействия  $\mathbf{F}_{ij}$ , причем  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  и  $\mathbf{F}_{ij} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ , т. е. сила взаимодействия (внутренняя сила). Рассмотрим уравнение движения  $i$ -го элемента

$$\Delta m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \Delta m_i \mathbf{g} + \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij}. \quad (8)$$

Умножим левую и правую части на  $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt$ . При этом получим  $\dot{\mathbf{v}}_i \mathbf{v}_i dt = d(v_i^2/2)$ ,  $\mathbf{g} d\mathbf{r}_i = -g dz_i$ ,  $\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i = 0$ , так как  $\mathbf{F}_i \perp d\mathbf{r}_i$ . После суммирования по всем элементам появятся пары

$$\mathbf{F}_{ij} d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ji} d\mathbf{r}_j = \mathbf{F}_{ij} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)) = \boldsymbol{\omega} ((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}) = 0.$$

Таким образом, после интегрирования по  $d\mathbf{r}_i$  и суммирования отдельных уравнений (8) получим

$$\sum \Delta m_i \frac{v_i^2}{2} + \sum \Delta m_i g z_i = \text{const}. \quad (9)$$

Выразим скорость  $\mathbf{v}_i$  через вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega} = \{0, \omega, 0\}$  и радиус-вектор  $\mathbf{r}_i$ :  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\rho}_i$ . Учитывая, что  $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{\rho}_i$ , получим  $v_i^2 = \omega^2 \rho_i^2$ . Таким образом,

$$\sum \Delta m_i \frac{v_i^2}{2} = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (10)$$

где  $J = \sum \Delta m_i \rho_i^2$  представляет момент инерций тела относительно рассматриваемой оси.

Второй член (9) возможно преобразовать, вводя координаты центра масс

$$x_C = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i}, \quad y_C = \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i}, \quad z_C = \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i}. \quad (11)$$

При этом получим закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{1}{2} J \omega^2 + mgz_C = \text{const}, \quad (m = \sum \Delta m_i). \quad (12)$$

В качестве другого примера рассмотрим упругую силу, возникающую при смещении  $x$  из положения равновесия ( $z = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ )

$$F = -kx. \quad (13)$$

В качестве потенциальной энергии следует взять работу упругих сил с обратным знаком

$$U(x) = - \int_0^x F dx = k \frac{x^2}{2}. \quad (14)$$

Закон сохранения механической энергии в этом случае будет иметь вид

$$m \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} kx^2 = \text{const}. \quad (15)$$

**2. Закон сохранения импульса.** Рассмотрим систему взаимодействующих между собой материальных точек с массами  $m_i$ . Для силы взаимодействия примем лишь, что  $F_{ij} = -F_{ji}$ . Если на систему не действуют внешние силы, то сохраняется импульс системы. Рассмотрим уравнение движения для  $i$ -й материальной точки

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{F}_{ij}. \quad (16)$$

Просуммируем эти уравнения по  $i$  и учтем, что  $F_{ij} = -F_{ji}$ . В результате получим

$$\sum m_i \dot{\mathbf{v}}_i = 0 \quad (17)$$

или

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = \text{const}, \quad (18)$$

соотношение (18) выражает закон сохранения импульса системы материальных точек с указанным типом взаимодействия.

В качестве примеров рассмотрим абсолютно неупругое и абсолютное упругое соударение шаров. Удар предполагается центральным. При абсолютно неупругом соударении предполагается, что оба шара после соударения двигаются с одинаковой скоростью. При абсолютно упругом соударении предполагается, что суммар-

ная кинетическая энергия после удара равна суммарной кинетической энергии до удара. Предполагается, что время удара столь мало, что импульсом неударных сил за время удара можно пренебречь. В этом случае в процессе удара должен сохраняться общий импульс. В случае неупругого удара получим

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v. \quad (19)$$

Уравнение (19) дает возможность определить скорость  $v$  после удара.

В случае упругого удара удобно перейти в систему отсчета, связанную с центром масс системы. В этой системе отсчета суммарный импульс равен нулю, поэтому он останется равным нулю и после удара:

$$m_1 v_{1C} + m_2 v_{2C} = 0, \quad m_1 v'_{1C} + m_2 v'_{2C} = 0, \quad (20)$$

где  $v_{1C}, v_{2C}$  — скорости в системе центра масс до удара, а  $v'_{1C}, v'_{2C}$  — после удара.

Из (20) следует, что

$$v_{1C} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2C}, \quad v'_{1C} = -\frac{m_2}{m_1} v'_{2C}. \quad (21)$$

Для того чтобы после соударения полностью восстанавливалась кинетическая энергия, необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$v'_{1C} = -v_{1C}, \quad v'_{2C} = -v_{2C}. \quad (22)$$

Учитывая, что

$$v_{1C} = v_1 - v_C, \quad v'_{1C} = v'_1 - v_C, \quad (23)$$

где

$$v_C = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (24)$$

получим

$$v'_1 = -v_1 + 2v_C, \quad v'_2 = -v_2 + 2v_C. \quad (25)$$

**3. Закон сохранения момента импульса.** Если на все материальные точки, входящие в систему, действуют лишь силы  $F_i$ , направленные в единый центр, а между материальными точками действуют силы взаимодействия  $F_{ij} = -F_{ji}$ ,  $F_{ij} \parallel (r_i - r_j)$ , то выполняется закон сохранения момента импульса. Обозначим момент импульса через  $L$ , радиус-вектор  $i$ -й материальной точки через  $r_i$ , начало координат возьмем в точке, куда направлены все внешние силы  $F_i$ .

Рассмотрим уравнение движения  $i$ -й материальной точки

$$m_i \dot{v}_i = F_i + \Sigma F_{ij}. \quad (26)$$



Умножим левую и правую части векторно на  $\mathbf{r}_i$  и просуммируем по  $i$ . Учитывая, что  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$  и что  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0$ , получим

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i = 0. \quad (27)$$

С другой стороны, дифференцируя по времени момент импульса, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{v}_i + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i. \quad (28)$$

Первый член правой части (28) равен нулю, так как  $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i$ , второй — равен нулю согласно (27). Следовательно,

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \text{const.} \quad (29)$$

Рассмотрим случай, в котором система материальных точек вращается вокруг вертикальной оси, т. е.  $\boldsymbol{\omega} = \{0, 0, \omega\}$ . Разобьем эту систему на тонкие слои  $z = \text{const}$  толщиной  $\Delta z$ . Предположим, что в каждом таком слое действуют лишь внутренние силы  $\mathbf{F}_{ij}$  и внешние силы  $\mathbf{F}_i$ , направленные к оси или от оси. Для каждого такого слоя будет выполняться соотношение (29), где начало вектора  $\mathbf{r}_i$  лежит на оси. Пусть до некоторого момента времени все элементы (материальные точки) системы совершали лишь вращение вокруг общей оси. В этом случае для такого слоя

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) = \sum m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (30)$$

т. е.

$$\mathbf{L} = J \boldsymbol{\omega}. \quad (31)$$

Если под действием внутренних сил  $\mathbf{F}_{ij}$  и внешних сил  $\mathbf{F}_i$  в таких слоях происходит перемещение отдельных элементов, в результате чего меняется момент инерции, то с изменением момента инерции должна измениться и угловая скорость так, чтобы выполнялось условие (29).

После того как все перемещения закончатся и все элементы системы опять будут совершать лишь вращение вокруг общей оси, будет выполняться соотношение (30). Однако некоторые  $r_i^2$  будут иметь другое значение. Постоянство момента импульса  $L$  означает, что угловая скорость изменится так, чтобы выполнялось соотношение

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2. \quad (32)$$

*Литература к главе 9:* [1] — глава 6; [2] — главы III—V; [3] — главы III—IV, X; [4] — главы III, IV.

**Измерение скорости полета пули с помощью баллистического маятника**

**Принадлежности:** 1) баллистический маятник, 2) пружинный пистолет, 3) шкала для отсчета отклонений маятника, 4) набор пуль.

Баллистический маятник представляет собой цилиндр, частично заполненный пластином и подвешенный в горизонтальном положении на длинных и легких нитях (рис. 9.1). Масса цилиндра с пластином равна  $M$ . В маятник в горизонтальном направле-

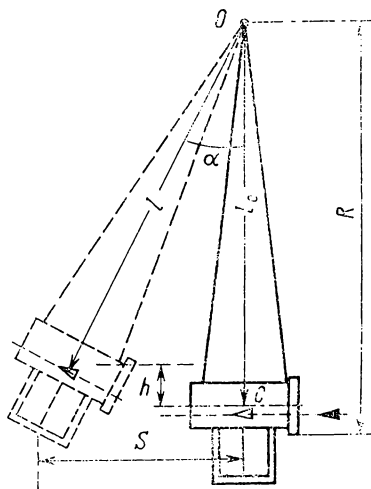


Рис. 9.1

нии стреляют из пружинного пистолета пулей, имеющей массу  $m$  и скорость  $v$ . Пуля входит в пластину и сообщает маятнику некоторую скорость, в результате чего маятник отклоняется в процессе колебания на некоторый угол, который может быть измерен.

Будем предполагать, что система в целом обладает вертикальной плоскостью симметрии. Обозначим в этой плоскости точкой  $O$  след оси маятника (т. е. горизонтальной оси, к которой крепятся верхние концы нитей), а точкой  $C$  — центр масс цилиндра (с пластином). Для простоты рассмотрения будем считать, что пуля застревает в пластине таким образом, что ее центр масс находится на прямой  $OC$ . Размерами пули будем пренебрегать. Существенной особенностью баллистического маятника является то, что время действия силы со стороны пули на маятник (время удара) мало по сравнению с периодом колебания маятника. Такие кратковременные силы, имеющие конечный импульс силы, называются ударными силами, а процесс взаимодействия пули и маят-

ника — ударным процессом. Ударный характер взаимодействия приводит к тому, что к концу удара маятник, приобретая конечную скорость, практически не успевает отклониться на какую-либо заметную величину.

При малых временах соударения ударные силы достигают больших значений, так как за малое время действия изменяют импульс тела на заметную величину. Если за время удара на нити не действуют такие большие ударные силы, то для анализа движения цилиндра сразу после удара достаточно учесть лишь силу, действующую со стороны пули. Движение цилиндра при этом можно будет представить, как вращение вокруг мгновенной оси. Но для того, чтобы не возникали ударные силы натяжения нити, необходимо, чтобы такое движение не приводило к изменению длины нитей. А это означает, что мгновенная ось должна совпадать с осью маятника. Точку пересечения линии действия ударной силы с прямой  $OC$  в этом случае называют центром удара, а сам удар — центральным ударом.

В случае центрального удара натяжения нитей в процессе соударения меняются, так как возникают центростремительные ускорения элементов цилиндра. Однако эти изменения натяжений имеют конечные значения при стремлении времени удара к нулю, поэтому их в процессе соударения можно не учитывать. Если же удар не центральный, то возникают такие ударные натяжения, которые необходимо учитывать при соударении. При этом помимо основного движения возникают высокочастотные колебания, которые довольно быстро затухают.

Обозначим расстояние от точки  $O$  до центра масс  $C$  через  $l_C$ , а расстояние от точки  $O$  до центра удара — через  $l$ . Силу, действующую со стороны пули на цилиндр, обозначим через  $F$ , момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно вертикальной плоскости симметрии, — через  $J_0$ , скорость центра масс цилиндра обозначим через  $v_C$ , а угловую скорость цилиндра — через  $\Omega$ . Пусть удар начинается в момент  $t=0$  и заканчивается в момент  $t=\tau$ . Учитывая лишь ударную силу  $F$ , получим изменение импульса и момента импульса цилиндра в результате удара

$$Mv_C = \int_0^{\tau} F(t) dt, \quad (1)$$

$$J_0\Omega = (l - l_C) \int_0^{\tau} F(t) dt. \quad (2)$$

В случае центрального удара мгновенная ось совпадает с осью маятника, поэтому

$$v_C = l_C\Omega. \quad (3)$$

Деля (2) на (1) и учитывая (3), получим

$$l - l_C = \frac{J_0}{Ml_C}. \quad (4)$$

Соотношение (4) определяет положение центра удара. Он расположен на расстоянии  $l$  от оси  $O$ , т. е. несколько ниже центра масс  $C$ .

Рассмотрим изменение импульса пули в результате соударения. Обозначим силу, действующую со стороны цилиндра на пулю, через  $F'$ , а скорость пули сразу после удара через  $v'$ . Изменение импульса будет определяться импульсом силы

$$mv' - mv = \int_0^{\tau} F' dt. \quad (5)$$

Учитывая третий закон Ньютона ( $F' = -F$ ), из сравнения (1) и (5) получаем соотношение

$$mv = Mv_c + mv'. \quad (6)$$

Соотношение (6) имеет вид закона сохранения импульса, к которому мы пришли, так как не учитывали действия всех сил, кроме сил  $F$  и  $F'$ . Этому соотношению можно придать вид закона сохранения момента импульса. Для этого умножим левую и правую части (6) на  $l$ . Учитывая (3), (4), кинематическое соотношение  $v' = l\Omega$  и вводя момент инерции цилиндра относительно оси  $O$ .

$$J = J_0 + Ml^2, \quad (7)$$

получим

$$mvl = (J + ml^2)\Omega. \quad (8)$$

Заметим, что если бы вместо нитей были жесткие тонкие невесомые стержни с осью в точке  $O$ , то соотношение (8) выполнялось бы и для нецентрального удара. Но в случае нецентрального удара возникали бы ударные силы, действующие на стержни и в конечном счете на ось.

Соотношение (6) можно также записать в виде

$$mv = (Ml_c + ml)\Omega. \quad (9)$$

После завершения удара маятник будет совершать колебания. При этом максимальное отклонение от положения равновесия пусть будет определяться углом  $\alpha$ . Если можно пренебречь потерями энергии за четверть периода, то потенциальная энергия маятника в момент остановки будет равна кинетической энергии маятника сразу после удара:

$$\frac{1}{2}(J + ml^2)\Omega^2 = Mh_c g + mhg, \quad (10)$$

где  $h_c$  равно изменению высоты центра масс цилиндра при отклонении маятника на угол  $\alpha$ , т. е.

$$h_c = l_c (1 - \cos \alpha) = l_c 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (11)$$

Аналогичная формула получается для изменения высоты центра масс пули  $h$ .

Учитывая соотношение, связывающее период малых колебаний  $T$  с моментом инерции  $J + ml^2$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{(Ml_c + ml)g}{J + ml^2}, \quad (12)$$

можно вместо момента инерции  $J + ml^2$  ввести период  $T$ . При этом получим из (10) с учетом (11)

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} 2 \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (13)$$

При малых отклонениях  $2 \sin \frac{\alpha}{2} = \alpha$  и (13) переходит в соотношение, связывающее амплитудные значения скорости  $\Omega$  и отклонения  $\alpha$ .

Из соотношения (9) с учетом (13) получим

$$v = \frac{Ml_c + ml}{m} \cdot \frac{2\pi}{T} 2 \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (14)$$

Если  $J_0 \ll Ml_c^2$ , т. е. размеры цилиндра малы по сравнению с длиной нити, то  $J \approx Ml_c^2$ . При этом различие между  $l_c$  и  $l$  в (12) можно пренебречь. Вместо (12) в таком случае получим

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l_c}. \quad (15)$$

Из (14) с учетом (15), пренебрегая различием между  $l_c$  и  $l$ , получим

$$v = \frac{M + m}{m} \sqrt{l_c g} 2 \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (16)$$

Формула (16) является окончательной формулой, которая используется в данной работе для определения скорости пули.

**Измерения.** Прежде всего необходимо убедиться в том, что ось цилиндра в положении равновесия горизонтальна, а вертикальная плоскость, проходящая через ось цилиндра, является плоскостью симметрии. Если эти условия не выполнены, то необходимо подрегулировать длину нитей.

Шкалу, предназначенную для определения отклонения маятника, устанавливают параллельно отсчетной рамке маятника на расстоянии примерно 5—6 мм от нее. Угол отклонения маятника  $\alpha$  определяется по смещению  $S$  нити отсчетной рамки в горизонтальном направлении, исходя из условия

$$\alpha = \arctg(S/R), \quad (17)$$

где  $R$  — расстояние от оси маятника до горизонтальной линии шкалы, вдоль которой измеряется смещение нити рамки. При малых углах можно считать, что  $\alpha = S/R$ .

Для того чтобы подготовить пистолет к выстрелу, отводят рычаг  $I$  (рис. 9.2) в крайнее положение, сжимая пружину. Вставляют

пулю в дуло пистолета 2 и задвигают ее шомполом до конца. Убедившись в том, что пуля, вылетевшая из пистолета, может попасть лишь в маятник, производят выстрел. Для этого курок 3 отводят вертикально вниз. Делают отсчет отклонения маятника по шкале.

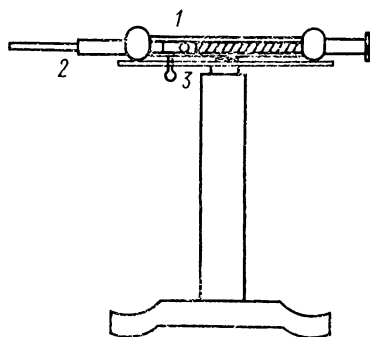


Рис. 9.2

Для каждой пули производят не менее пяти выстрелов и соответственно этому не менее пяти отсчетов отклонения маятника.

По этим данным определяют среднее значение отклонения  $S$ , по формуле (17) находят величину  $\alpha$  и подставляют ее в формулу (16) для определения скорости полета пули.

Опыты производят с тремя пулями.

Масса цилиндра и расстояние от оси  $O$  до центра масс цилиндра даются. Массы пуль определяют взвешиванием.

**Литература:** [1] — § 23—25; [2] — § 26; [3] — § 67—71, 87—90, 92, 94, 95; [4] — § 52—57.

### *Лабораторная работа 10*

#### **Крутильный баллистический маятник**

**Принадлежности:** 1) установка, 2) секундомер, 3) сантиметровая линейка.

**Вариант I.** Цель задачи — определение скорости пули при помощи крутильного баллистического маятника.

**Описание установки.** Установка состоит из крутильного маятника и пружинного пистолета. Крутильный маятник (рис. 9.3) собран из двух массивных металлических стержней, скрепленных муфтой  $A$ .

По горизонтальному стержню между кольцами  $B$  и муфтой  $A$  могут перемещаться два металлических цилиндра (груза)  $C$ . Вблизи концов стержня в разных местах могут закрепляться чашечки  $D$ , наполненные пластилином.

Для измерения угла поворота маятника на его вертикальном стержне укреплено зеркальце *E*. Луч света от осветителя, отражаясь от зеркала, скользит по шкале (на рисунке не показана).

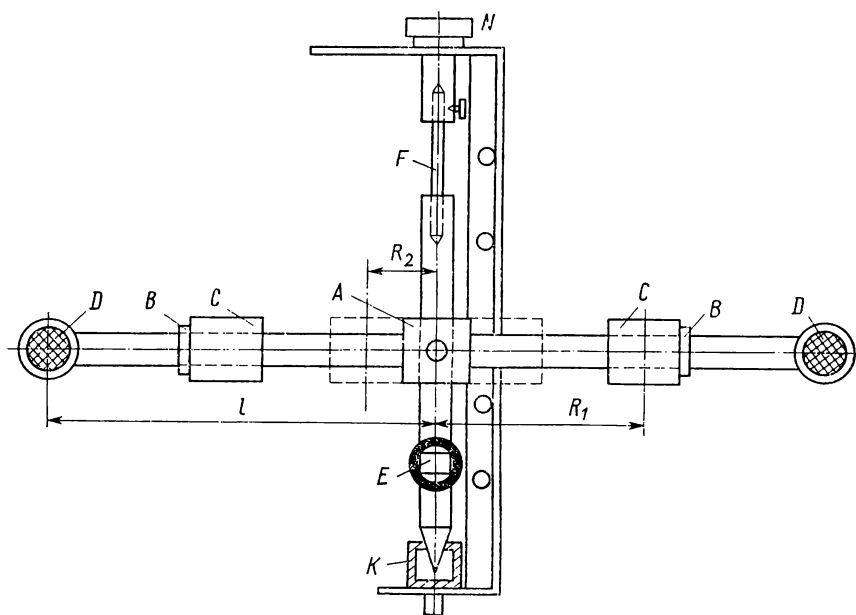


Рис. 9.3

Величина угла поворота  $\varphi$  определяется с учетом закона отражения луча

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{S}{L},$$

где  $L$  — расстояние от зеркала до «зайчика» на шкале,  $S$  — отклонение по шкале, на которое смещается «зайчик». Маятник укреплен на кронштейне при помощи подшипника  $K$  и проволоки  $F$ , деформация которой создает момент упругих сил. Вращением головки  $N$  вертикальная плоскость маятника может быть установлена в нужном положении.

Пистолет представляет собой металлическую трубку-ствол, укрепленную на массивном основании. В закрытом конце этой трубки имеется пружина. Пружина сжимается, пуля загоняется в ствол. После освобождения пружины пуля выбрасывается.

**Теория.** После попадания пули в маятник он начинает колебаться вокруг своей вертикальной оси. Если пренебречь при его движении моментом сил трения, то можно воспользоваться двумя законами сохранения.

На основании закона сохранения моментов количества движения, считая удар полностью неупругим, можно написать (до удара и после)

$$mvl = (J_1 + ml^2) \omega, \quad (1)$$

где  $m$  — масса пули,  $v$  — ее скорость,  $l$  — расстояние от оси вращения маятника до точки удара пули,  $\omega$  — угловая скорость маятника,  $J_1$  — момент инерции маятника.

Закон сохранения механической энергии (после удара) дает

$$\frac{1}{2} (J_1 + ml^2) \omega^2 = \frac{1}{2} D\varphi^2, \quad (2)$$

где  $\varphi$  — наибольший угол поворота маятника,  $D$  — постоянная момента упругих сил.

Из этих уравнений получаем

$$v^2 = \frac{D\varphi^2}{m^2 l^2} (J_1 + ml^2). \quad (3)$$

Так как момент инерции пули  $ml^2$  во много раз меньше  $J_1$ , то уравнение (3) может быть написано в виде

$$v^2 = \frac{D\varphi^2}{m^2 l^2} J_1. \quad (4)$$

Будем считать, что:

- 1)  $\tau \ll T$ , т. е. время воздействия пули на маятник во много раз меньше периода колебаний маятника (баллистический маятник);
- 2)  $\sin \alpha \approx \alpha$ , т. е. угол отклонения маятника мал — не более  $5-6^\circ$ .

Уравнение движения баллистического маятника при этих условиях может быть написано в виде

$$J_1 \ddot{\alpha} = -D\alpha,$$

где  $\alpha$  — угол поворота маятника,  $\ddot{\alpha}$  — угловое ускорение. Решение этого уравнения приводит к выражению для периода колебаний

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{D}}. \quad (5)$$

Для исключения величины  $D$  можно поступить следующим образом. Изменим момент инерции маятника, изменив расстояние между грузами. Тогда

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{D}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{D}}, \quad (6)$$

$$J_1 - J_2 = \Delta J, \quad (7)$$

где  $T_2$  — период колебаний при новом значении момента инерции  $J_2$ ,  $\Delta J$  — разность моментов инерции.



Уравнения (6) дают

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}. \quad (8)$$

Из уравнений (7) и (8) получаем

$$J_1 = \frac{T_1^2}{T_1^2 - T_2^2} \Delta J. \quad (9)$$

Уравнения (4), (5) и (9) дают

$$v = \frac{2\pi\phi}{ml} \frac{T_1}{T_1^2 - T_2^2} \Delta J. \quad (10)$$

Величину  $\Delta J$  можно определить, пользуясь теоремой Гюйгенса—Штейнера. Из этой теоремы следует, что

$$J_1 = J_0 + 2MR_1^2, \quad (11)$$

$$J_2 = J_0 + 2MR_2^2, \quad (12)$$

где  $J_0$  — момент инерции маятника, когда центры тяжести грузов  $C$  (см. рис. 9.3) совпадают с осью вращения маятника,  $J_1$  — момент инерции, когда оба груза находятся на расстоянии  $R_1$  от оси вращения,  $J_2$  — момент инерции, когда оба груза находятся на расстоянии  $R_2$ ,  $M$  — масса одного груза.

Пусть  $R_1 > R_2$ , тогда из уравнений (11) и (12) получаем

$$\Delta J = 2M(R_1^2 - R_2^2). \quad (13)$$

Уравнения (10) и (13) окончательно дают

$$v = \frac{4\pi\phi M}{ml} \frac{T_1}{T_1^2 - T_2^2} (R_1^2 - R_2^2). \quad (14)$$

**Измерения.** Скорость пули определяется по формуле (14). Массы пули и цилиндров известны, поэтому измерения сводятся к определению периодов  $T_1$  и  $T_2$  колебаний маятника для двух положений цилиндров, соответствующих расстояниям  $R_1$  и  $R_2$ , расстояний  $l$ ,  $L$  и отклонений  $S$ , соответствующих максимальному отклонению «зайчика» после выстрела.

Работу начинают с того, что оба цилиндра раздвигают вдоль стержня так, чтобы они касались колец. Изменяют величины  $R_1$  и  $l$ , т. е. расстояние между осью маятника и серединой одной из чашечек с пластилином. Затем устанавливают правильное расположение маятника и пистолета так, чтобы:

- 1) «зайчик» был на середине шкалы;
- 2) ось ствола пистолета была перпендикулярна к оси горизонтального стержня маятника; ось ствола и ось стержня были в одной горизонтальной плоскости;

3) конец ствола пистолета был на расстоянии 2—3 см от поверхности пластилина в чашечке. Это достигается поворотом маятника (вращением головки  $N$ ) и правильным расположением пистолета, свободно перемещаемого по столу.

Расстояние  $L$  между зеркальцем и «зайчиком» измеряют сантиметровой линейкой. После этого производят «выстрел», пистолет отодвигают в сторону и замечают по шкале наибольшее отклонение  $S$  «зайчика» от положения равновесия.

Для измерения периода колебаний  $T_1$ , не останавливая маятника, пускают в ход секундомер. Через десять полных колебаний (периодов) секундомер останавливают, определяют значение одного периода.

Уменьшив момент инерции маятника (придвинув цилиндры вплотную к муфте), измеряют  $R_2$  — расстояние между осью маятника и серединой одного из цилиндров.

Для измерения периода колебаний  $T_2$  снова производят «выстрел». Определение величины периода  $T_2$  производится так же, как и величины периода  $T_1$ . По формуле (14) определяют скорость пули.

Если при втором расположении цилиндров измерить соответствующий угол максимального отклонения  $\varphi_2$ , то можно определить скорость пули и во втором случае, для этого только нужно в числителе формулы (14) заменить  $T_1$  на  $T_2$ .

Если скорость пули для двух случаев расположения цилиндров одна и та же, то должно выполняться соотношение  $\varphi T_1 = \varphi_2 T_2$ , т. е. вместо  $\varphi T$  в формуле (14) можно использовать

$$\frac{1}{2} (\varphi T_1 + \varphi_2 T_2).$$

Все измерения необходимо производить не менее трех раз и в расчетах использовать среднее значение измеряемых величин.

Условием, при котором маятник можно рассматривать как баллистический, является малость времени соударения пули по сравнению с периодом колебаний маятника. Для оценки времени соударения  $\tau$  можно измерить штангенциркулем глубину  $h$  проникновения пули в пластилин и определить время  $\tau$ , воспользовавшись соотношением

$$\tau = \frac{h}{v},$$

где среднее значение  $\bar{v}$  можно для оценки взять  $\bar{v} = 1/2 v$ . Сравнение  $\tau$  с  $T_1$  и  $T_2$  дает возможность убедиться в том, что маятник является баллистическим.

**Вариант II.** Цель работы — определение скорости пули при помощи баллистического маятника. Теорию см. в описании варианта I.

**Описание установки.** Установка состоит из крутильного маятника, пистолета и электронного блока, включающего в себя тай-

мер и фотоэлектрическую систему для регистрации числа полных периодов колебания маятника.

Крутильный маятник собран из двух массивных металлических стержней (вертикального и горизонтального), скрепленных муфтой. По горизонтальному стержню могут перемещаться два металлических груза. На концах стержня закреплены чашечки, наполненные пластилином. Величина угла поворота маятника определяется непосредственно по наружной круговой шкале. Маятник укреплен при помощи вертикально натянутой металлической проволоки, деформация которой создает момент упругих сил (см. рис. 9.3).

Пистолет представляет собой закрепленную на установке трубку-ствол, внутри которой находится упругая пружина с направляющим стержнем. Пружина сжимается, пуля, представляющая собой короткий полый металлический цилиндр, надевается на направляющий стержень и опускается в ствол. После освобождения пружины пуля выбрасывается.

Включение электронного блока осуществляется нажатием на клавишу «сеть». При нажатии на клавишу «сброс» происходит обнуление обоих табло электронного блока. После нажатия на клавишу «пуск» при первом же пересечении маятником светового пучка фотоэлектрической системы происходит запуск электронного таймера и системы счета периодов колебания маятника. При нажатии на клавишу «стоп» происходит выключение таймера и системы счета периодов после завершения очередного периода колебаний. При этом на табло электронного блока высвечиваются число полных колебаний  $N$  и соответствующее им значение времени  $t$ .

**Измерения.** Начинают с того, что оба грузика максимально раздвигают вдоль стержня. Измеряют величину  $R_1$ , т. е. расстояние между осью маятника и серединой одного из цилиндров. Измеряют также  $l$  — расстояние между осью маятника и серединой одной из чашечек с пластилином. Затем устанавливают правильное расположение маятника, чтобы ось ствола пистолета была перпендикулярна оси горизонтального стержня маятника.

После этого производят «выстрел» и отсчитывают угол  $\varphi$  наибольшего отклонения маятника от положения равновесия.

Для измерения периода колебаний  $T_1$ , не останавливая маятника, пускают в ход таймер и фотоэлектрическую систему нажатием клавиши «пуск». Число колебаний маятника  $N$  рекомендуется выбирать таким, чтобы относительная ошибка периода была много меньше ошибок измерения других величин.

Уменьшив момент инерции маятника (придвинув цилиндры вплотную к муфте), измеряют  $R_2$  — расстояние между осью маятника и серединой одного из цилиндров.

Для измерения периода колебаний  $T_2$  снова производят «выстрел». Определение величины периода  $T_2$  производится так же, как и величины периода  $T_1$ . Скорость пули определяется по формуле (14) варианта I.

$$v = \frac{4\pi\varphi}{ml} \frac{T_1}{T_1^2 - T_2^2} (R_1^2 - R_2^2),$$

где  $M$  — масса одного из грузов на горизонтальном стержне маятника,  $m$  — масса пули (указана в приложении к установке),  $\varphi$  — угол максимального отклонения маятника после выстрела, определяемый по отклонению  $S$  «зайчика» на шкале (см. описание лабораторной работы 110) и расстоянию  $L$  от зеркала до «зайчика» на шкале. С учетом закона отражения

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{S}{L}.$$

Для грубой оценки времени соударения  $\tau$  можно измерить штангенциркулем глубину проникновения пули в пластину  $h$  и воспользоваться выражением

$$\tau = \frac{h}{\bar{v}},$$

где  $\bar{v} \approx v/2$  — средняя скорость движения пули в пластине. Сравнение  $\tau$  и  $T_1$  дает возможность убедиться в том, что маятник является баллистическим.

Все измерения необходимо производить не менее трех раз и пользоваться средним арифметическим значением измеряемой величины.

**Литература:** [1] — § 23—25; [2] — § 26; [3] — § 67—71, 87—90, 92, 94, 95; [4] — § 52—57.

## *Лабораторная работа 11*

### **Изучение движения маятника Максвелла**

**Введение.** Цель задачи — ознакомление с плоским движением твердого тела на примере движения маятника Максвелла. Маятник Максвелла состоит из тонкого металлического стержня — оси  $AB$  с симметрично укрепленным на нем диском  $C$  (см. рис. 9.4). К концам стержня прикреплена крепкая капроновая нить, пропущенная через два отверстия в планке  $DE$ , которая укреплена на массивном штативе. На середине планки имеется винт, которым нить закрепляется в нужном положении после уравнивания длин отрезков нитей  $AD$  и  $BE$ . Нити тщательно, виток к витку, наматываются на стержень (от его концов к диску). Положение оси и расстояния, которые она проходит при движении маятника, измеряются по шкале  $K$ . После освобождения маятника он начинает движение из верхнего положения под действием силы тяжести: поступательное — вниз и вращательное — вокруг своей оси симметрии. Вращение, продолжаясь по инерции в низшей точке, когда

нити уже размотаны, приводит вновь к наматыванию нитей на стержень, а следовательно, и к подъему маятника. Затем движение маятника вверх замедляется, он останавливается, снова начинается движение вниз и т. д. Такой колебательный характер движения вверх-вниз напоминает движение маятника, и поэтому устройство называется маятником Максвелла.

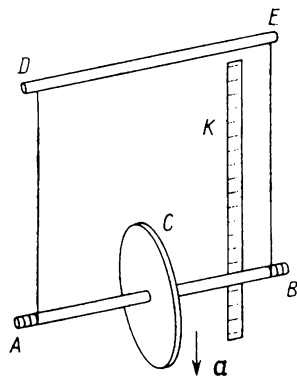


Рис. 9.4

Цикл движения маятника Максвелла может быть подразделен на три стадии, а именно: спуск, удар, поднятие вверх. Схематически графики изменения скорости и ускорения точек оси маятника при его движении имеют вид, изображенный на рис. 9.5.

В соответствии с этим силы, действующие на маятник, должны быть подразделены на силы длительного действия (при спуске и поднятии) и силы кратковременного действия (удар). В первом случае эти силы не изменяются во времени, во втором — они резко нарастают и убывают.

Отметим, что удар при опускании маятника отличается от удара, например, шарика о плиту. Кинетическая энергия падающего тела (шарика) на первой стадии удара исчезает полностью, превращаясь в потенциальную энергию упругой деформации. При ударе маятника этого нет, остается кинетическая энергия его вращения, которая гораздо больше, чем кинетическая энергия поступательного движения перед ударом.

Экспериментальное ознакомление с движением маятника Максвелла состоит в наблюдении плоского движения (на всех трех стадиях движения маятника) и удара (вторая стадия). Получить полное аналитическое решение за весь цикл движения маятника не представляется возможным. В задаче стадии движения рассматриваются отдельно одна от другой, используются предположения, которые упрощают рассмотрение вопроса. Естественно, это приводит к приближенным уравнениям, которые и применяются в экспериментальной части задачи.

В практикуме имеются три типа установок (А, В, С) с маятником Максвелла, отличающихся деталями конструкции и характером измеряемых величин. Вначале рассматривается теория движения маятника, а затем порядок работы на каждой из установок.

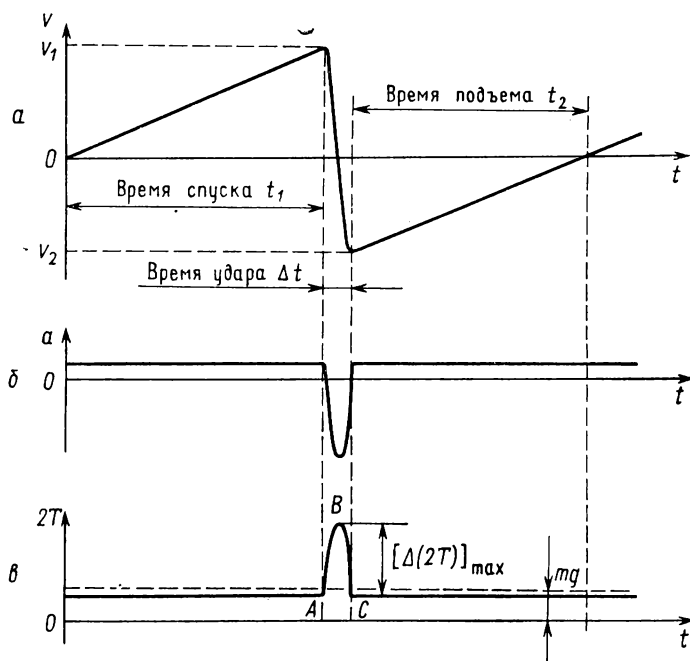


Рис. 9.5

**Теория движения маятника Максвелла.** Движение маятника Максвелла является примером плоского движения. Плоское движение любого твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости, может быть сведено к движению некоторой неизменяемой плоской фигуры в ее плоскости, складывающемуся из поступательного движения какой-либо точки этой фигуры и вращения ее относительно этой точки. Если в кинематике это может быть любая точка тела, то в динамике удобно пользоваться точкой, в которой находится центр масс тела. Это позволяет применять теорему о движении центра масс и уравнение моментов в его простейшем (обычном) виде.

Вначале проанализируем вопрос о расположении нитей при движении маятника. Поскольку движение происходит под действием силы тяжести и силы натяжения нитей, то устойчивое движение маятника (без раскачивания) возможно только, если нити находятся в вертикальной плоскости (рис. 9.6). При отклонении

нитей от нее у силы натяжения возникает горизонтальная составляющая, возвращающая маятник к положению, когда нити вертикальны, т. е. возникают колебания, период которых зависит от длины нитей. Это явление наблюдается во время подъема маятника, когда нити выходят из вертикальной плоскости (см. ниже). Перед отпусканием маятника в правильном исходном положении нити должны находиться в вертикальной плоскости, поэтому движение вниз происходит без колебаний (заметим, что при этом центр масс маятника находится *не под точкой подвеса нитей!*).

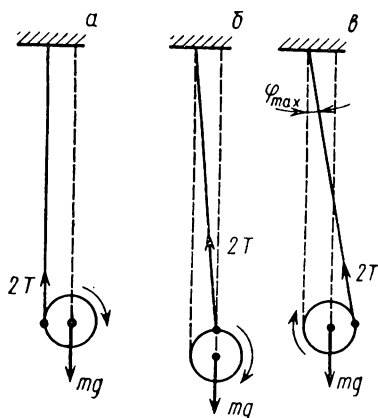


Рис. 9.6

Итак, без учета сил трения о воздух и отклонения нитей от вертикали при движении вверх (оно невелико) уравнения движения маятника Максвелла вниз и вверх одинаковы и имеют вид

$$ma = mg - 2T, \quad (1)$$

$$J\varepsilon = 2rT, \quad (2)$$

$$a = r\varepsilon, \quad (3)$$

где  $m$  — масса маятника,  $J$  — момент инерции маятника относительно его оси,  $r$  — радиус стержня маятника,  $T$  — сила натяжения одной нити,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $a$  — ускорение поступательного движения центра масс маятника,  $\varepsilon$  — угловое ускорение маятника. Хотя эти уравнения применимы как к первой, так и к третьей стадии движения маятника, начальные условия для них на разных стадиях различны. При опускании маятника начальная скорость его центра масс равна нулю, при его подъеме она отлична от нуля. Эти уравнения дают

$$a = \frac{g}{1 + J/mr^2}. \quad (4)$$

Поскольку момент инерции маятника можно представить в виде  $J = KmR^2$ , где  $R$  — радиус диска, безразмерный коэффициент  $K \approx \approx 1/2$ , величина  $J/mr^2 = K(R/r)^2 \gg 1$  (радиус диска  $R$  много больше радиуса стержня  $r$ ) и ускорение маятника  $a \ll g$ , а сила натяжения нитей

$$2T = m(g - a) \quad (5)$$

близка к весу маятника  $mg$ . Так как при равноускоренном движении (I стадия)

$$a = \frac{2h_1}{t_1^2}, \quad (6)$$

где  $t_1$  — время опускания маятника,  $h_1$  — расстояние, которое он проходит за это время, то для экспериментального определения момента инерции маятника из (4) и (6) получаем формулу

$$J = mr^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right) = mr^2 \left( \frac{gt_1^2}{2h_1} - 1 \right). \quad (7)$$

Для скорости опускания центра масс маятника непосредственно перед его ударом имеем

$$v_1 = at_1 = \frac{2h_1}{t_1}. \quad (8)$$

После удара при подъеме маятника вверх (III стадия) он движется равнозамедленно с ускорением  $a$ , направленным так же, как при его опускании вниз. Скорость движения центра масс маятника при подъеме определяется уравнением

$$v = v_2 - at, \quad (9)$$

где  $v_2$  — начальная скорость движения маятника вверх,  $t$  — время от начала этого движения. Появление этой скорости обусловлено продолжающимся по инерции вращением маятника в нижней точке его траектории. Наматывание при этом вращении нитей на стержень маятника и приводит к его подъему.

Если время подъема маятника до его остановки равно  $t_2$ , то для величины начальной скорости имеем

$$v_2 = at_2 = \frac{2h_2}{t_2}, \quad (10)$$

так как величина ускорения при подъеме маятника связана с расстоянием  $h_2$ , которое проходит его ось до остановки, таким же соотношением, как и при спуске:

$$a = \frac{2h_2}{t_2^2}. \quad (11)$$

Величины ускорений при спуске и подъеме должны быть одина-



ковы. Расстояние  $h_2$ , которое проходит ось маятника при его подъеме, несколько меньше, чем при спуске ( $h_1$ ). Разность этих высот характеризует убыль механической энергии маятника за один цикл его движения:  $\Delta W_{\text{мех}} = mg(h_1 - h_2)$ . Убыль энергии связана, вообще говоря, как с неупругими процессами в нитях в момент удара, так и с потерями на трение при движении маятника. Поскольку трение о воздух мало, можно считать, что энергия теряется в момент удара, и ее потеря равна убыли кинетической энергии маятника:  $\Delta W_{\text{мех}} \simeq \Delta W_{\text{уд}} = W_{\text{к1}} - W_{\text{к2}}$ .

Кинетическая энергия маятника равна

$$W_K = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2r^2} = \frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{J}{mr^2} \right), \quad (12)$$

где  $\omega = v/r$  — угловая скорость маятника. Поскольку  $J/mr^2 \gg 1$ , кинетическая энергия  $mv^2/2$ , связанная с поступательным движением, мала по сравнению с энергией вращательного движения  $J\omega^2/2$ . Это является главным отличительным признаком маятника Максвелла.

Характерной особенностью маятника Максвелла является малая потеря энергии при ударе:  $\Delta W_{\text{уд}} \ll W_K$ , т. е. близкий к единице коэффициент восстановления скорости  $K_v = v_2/v_1$ . Именно благодаря этому в данной системе можно наблюдать колебания, т. е. многократное повторение цикла движения вниз-вверх, а сама система называется «маятником».

Теперь рассмотрим удар в нижней точке движения маятника. Явление удара сопровождается, как уже упоминалось, резкими изменениями сил взаимодействия при очень малом времени этих изменений. Эти силы сначала нарастают, а затем убывают. Зависимость их от времени, как правило, неизвестна, и применение уравнений движения в явном виде становится невозможным.

В теории удара пользуются выражением для суммарного импульса силы

$$S = \int_0^{\Delta t} F(t) dt = \Delta(mv) = m(v_2 - v_1), \quad (13)$$

где  $m$  — масса ударяющегося тела,  $v_1$  и  $v_2$  — его скорости до и после удара,  $F(t)$  — сила, действующая на тело во время удара,  $\Delta t$  — длительность удара.

В нашем случае во время удара происходит резкое увеличение силы натяжения нитей  $2T$ . График изменения этой силы приведен на рис. 9.5, в. Поскольку скорость маятника при ударе меняет свое направление, изменение импульса равно  $m(v_1 + v_2)$ , оно происходит в результате воздействия на маятник импульса силы  $F(t) = (2T)_{\text{II}} - mg$ . Так как при движении маятника вниз и вверх (I и III стадии) сила натяжения нитей мало отличается от веса маятника:  $(2T)_{\text{I, III}} \approx mg$  (ускорение  $a_{\text{I, III}} \ll g$ ), можно считать,

что  $F(t) \approx (2T)_{II} - (2T)_{I,III} = \Delta(2T)$ . Таким образом, импульс силы, действующей на маятник при ударе

$$S = m(v_1 + v_2) = F_{\text{cp}} \Delta t = \int_0^{\Delta t} \Delta(2T) dt, \quad (14)$$

т. е. определяется площадью, ограниченной кривой  $ABCA$  на рис. 9.5 в. Поскольку при ударе угловая скорость маятника почти не изменяется (потери энергии малы), можно считать, что во время удара происходит вращение со средней угловой скоростью

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2r} \quad (15)$$

и время удара равно

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_{\text{cp}}} = \frac{2\pi r}{v_1 + v_2}. \quad (16)$$

Среднее значение силы, исходя из (14) и (16), равно

$$F_{\text{cp}} = \frac{m(v_1 + v_2)}{\Delta t} = \frac{m(v_1 + v_2)^2}{2\pi r}. \quad (17)$$

Рассмотрим упрощенную картину движения маятника при ударе. Удар начинается в тот момент, когда нити полностью размотались со стержня, а отверстия, в которые они продеты, горизонтальны, и заканчивается через поворот маятника, в момент начала нового наматывания нитей. Будем считать нити нерастяжимыми, т. е. пренебрежем дополнительным удлинением нитей при ударе  $\delta h$ , возникающим из-за роста сил натяжения, по сравнению с радиусом стержня маятника  $r$ :

$$\delta h \ll r. \quad (18)$$

При наших предположениях центр масс маятника во время удара совершает движение вниз-вверх по закону  $h_{\text{цм}} = h_0 - r \sin \omega_{\text{cp}} t$  ( $h_0$  — вертикальная координата центра масс в начале удара, время отсчитывается от момента начала удара). Поэтому сила, действующая на маятник во время удара,

$$F(t) = \Delta(2T) = ma(t) = m \frac{d^2 h_{\text{цм}}}{dt^2} = m \omega_{\text{cp}}^2 r \sin \omega_{\text{cp}} t \quad (19)$$

и

$$[\Delta(2T)]_{\text{max}} = m \omega_{\text{cp}}^2 r = \frac{m(v_1 + v_2)^2}{4r} = \frac{\pi}{2} F_{\text{cp}}, \quad (20)$$

т. е. максимальное увеличение силы натяжения нитей во время удара в  $\pi/2$  раз превышает среднее значение силы.

Заметим, что поскольку радиус стержня маятника мал по сравнению с длиной нитей  $h$ , нити маятника за время удара лишь не-

значительно отклоняются от вертикальной плоскости:  $\varphi_{\max} \ll \ll 2r/h \ll 1$ , и небольшая горизонтальная проекция силы натяжения  $2T$  не успевает вызвать заметного смещения центра масс маятника по горизонтали за это время (см. рис. 9.6, где показаны три последовательных положения оси маятника — в начале (а), в середине (б) и в конце (в) удара). Однако отклонение нитей от вертикальной плоскости, возникающее после удара, приводит к появлению небольшого раскачивания оси маятника во время его подъема (III стадия).

**Установка А. Принадлежности:** 1) установка; 2) секундомер; 3) угольник.

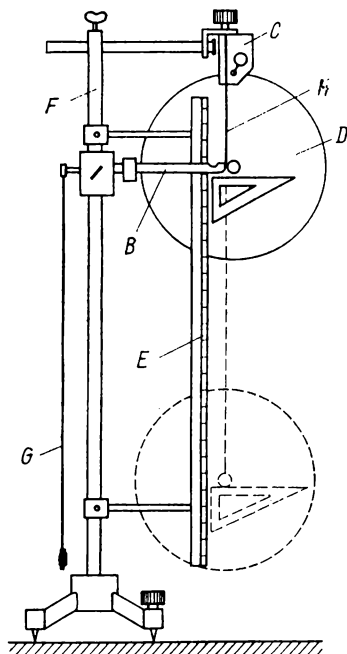


Рис. 9.7

**Измерения.** Схема установки приведена на рис. 9.7, чертеж, показывающий детали устройства маятника — на рис. 9.8 (буквами А—З обозначены размеры). Каждая из установок типа А снабжена табличкой, на которой указаны размеры отдельных частей маятника и плотности материалов, из которых они изготовлены. На установках типа А имеется опорная вилка В и стопорное устройство С, позволяющее освобождать диск маятника D без толчка в начале движения (см. рис. 9.7). Расстояния, которые проходит ось маятника при его движении вниз и вверх, измеряются по шкале Е. В нерабочем состоянии ось маятника должна ле-

жать в выемках двух стержней опорной вилки, а диск должен быть зажат в стопоре.

Перед началом измерений установку необходимо отъюстировать. При тщательной юстировке сокращается время, необходимое для проведения измерений, и уменьшается разброс экспериментальных данных.

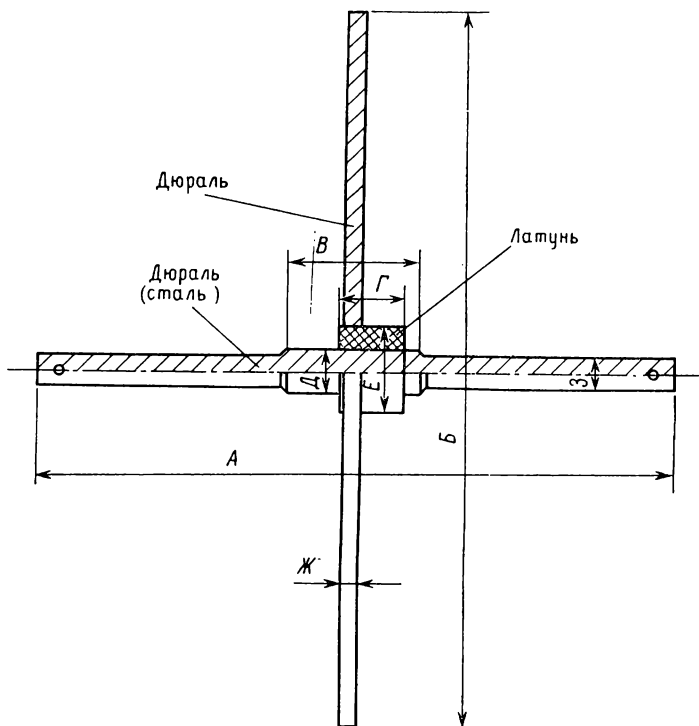


Рис. 9.8

Пользуясь установочными винтами на основании штатива  $F$  и отвесом  $G$ , стержень штатива устанавливают вертикально. Затем уравнивают длину нитей  $H$ , добиваясь горизонтального положения оси маятника, когда он свободно висит в нижнем положении. При помощи угольника отмечают нижнее положение оси маятника по шкале. Опорную вилку устанавливают так, чтобы торцы ее стержней лежали в одной плоскости с нитями маятника. Затем тщательно, виток к витку навивают нити на ось, наблюдая за тем, чтобы сохранялось горизонтальное положение оси при натянутых нитях  $H$ . Намотку производят до тех пор, пока ось маятника не окажется на уровне торцов стержней опорной вилки, слегка касаясь их; после этого верхний край диска маятника зажимается

стопорным устройством. Верхнее положение оси также отмечается по шкале при помощи угольника. Правильное исходное положение маятника перед началом движения показано на рис. 9.7. При аккуратно проведенной юстировке установки после нажатия на кнопку стопора маятник начинает движение вниз без раскачивания; после удара при движении вверх появляется небольшое раскачивание, о причине которого речь шла выше. При движении вниз и вверх ось маятника не должна перекашиваться; нити должны навиваться от отверстий, в которые они продеты, по направлению к диску. Если эти условия нарушаются, необходимо прекратить движение во избежание срыва с нитей и повреждения маятника, а затем повторить опыт.

По окончании измерений стержень маятника вновь укладывается в углубления на опорной вилке, а диск зажимается стопорным устройством.

Высота  $h_1$ , с которой маятник опускается до удара, определяется, как разность верхнего и нижнего отсчетов по шкале, полученных при помощи угольника во время юстировки. После установки правильного исходного положения маятника освобождают стопор, одновременно пуская секундомер; в момент удара секундомер останавливают, определяя, таким образом, время опускания  $t_1$ . В конце подъема маятника после удара, в момент остановки, зажимают пальцами диск и отмечают при натянутых нитях с помощью угольника верхнее положение стержня маятника по шкале; разность этого верхнего и нижнего отсчетов дает высоту  $h_2$ , на которую поднимается маятник. Затем повторяют опыт, пуская секундомер в момент удара и останавливая его в конце подъема; таким образом определяется время подъема  $t_2$ . Измерения величин  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $h_1$  и  $h_2$  проводят не менее пяти раз, затем находят их средние значения и рассчитывают стандартные отклонения этих средних.

По формулам (6) и (11) находят величины ускорений  $a$  маятника при спуске и подъеме, затем рассчитывают их стандартные отклонения и проверяют совпадение этих ускорений в пределах ошибок измерений. Затем по формулам (8) и (10) определяют величины скоростей маятника до и после удара  $v_1$  и  $v_2$  и коэффициент восстановления скорости  $K_v = v_2/v_1$ . По формуле (7) вычисляют момент инерции маятника  $J$  и рассчитывают ошибку его определения. Затем, используя данные о геометрических размерах маятника и плотностях материалов, из которых он изготовлен, рассчитывают теоретическое значение момента инерции  $J_{\text{теор}}$  и сопоставляют полученные величины.

Наконец, по формулам (16) и (20) рассчитывают время удара  $\Delta t$  и максимальное увеличение силы натяжения нитей во время удара  $[\Delta(2T)]_{\text{max}}$ . Сравнивают максимальный прирост силы натяжения с весом маятника  $mg$ .

Все измерения требуют большого внимания и аккуратности. Необходимо следить за маятником, особенно при движении вверх, и оберегать его от механических повреждений. Если наматывание

нитей будет происходить несимметрично или будет смещаться к концам стержня, маятник **необходимо** остановить, поскольку при срыве с нитей его стержень может согнуться и работать с таким маятником станет невозможно.

**Дополнительные измерения** (выполняются по указанию преподавателя).

1. Проверка правильности предположения (18) о нерастяжимости нитей при ударе. Надо оценить величину дополнительного удлинения нитей  $\delta h$ , возникающего в момент удара. Для этого необходимо, приставив угольник к шкале несколько ниже отметки, полученной при свободно висящем маятнике, добиться, передвигая угольник вверх и вниз, чтобы при движении маятника его стержень в момент удара слегка касался угольника. Разность двух этих нижних отсчетов и дает величину  $\delta h$ , которую надо сравнить с радиусом стержня маятника  $r$ .

2. Уточнение уравнения кинематической связи (3).

Возможной причиной расхождения величины момента инерции маятника  $J$ , определенной по формуле (7) и  $J_{\text{теор}}$ , является ошибка в определении радиуса  $r$  (в формуле (7), величина  $r$  стоит в квадрате). Нити, на которых подвешен маятник, достаточно толстые (их диаметр  $\sim 0,5$  мм), а стержень маятника — тонкий (его диаметр  $\sim 7$  мм), поэтому надо ввести поправку на толщину нитей. По смыслу величина  $r$  в уравнении кинематической связи (3) является коэффициентом пропорциональности между угловым и линейным перемещениями маятника. Поэтому можно найти  $r$  как отношение линейного и углового перемещений:  $r = \Delta h / \Delta \varphi$ . Для этого надо, поддерживая нити в натянутом состоянии, определить линейное перемещение оси маятника  $\Delta h$  (при помощи шкалы и угольника) при сматывании со стержня целого числа  $n$  витков нити; при большом  $n$  (скажем,  $n = 20$ ) угловое перемещение  $\Delta \varphi = 2\pi n$  можно определить достаточно точно, наблюдая за перемещением карандашной метки, сделанной на краю диска маятника. Полученное значение  $r$  надо сравнить с радиусом стержня и затем уточнить величину  $J$ , подставляя новое значение  $r$  в формулу (7).

**Установка В. Принадлежности:** 1) установка; 2) разновесы; 3) секундомер; 4) угольник.

**Измерения.** Установка изображена на рис. 9.9, размеры маятника и массы его частей приведены в табличке, прикрепленной к установке. Установка состоит из равноплечих лабораторных весов, установленных на высоте около 2 м над уровнем пола. К концу коромысла весов вместо снятой платформы на стремени  $B$  подвешивается маятник  $C$ . Рейка с делениями  $E$ , как и в установках типа  $A$ , служит для измерения расстояний, которые проходит маятник. В нерабочем состоянии ось маятника должна лежать в специальных углублениях на планке, прикрепленной к основанию коромысла весов.

Измерения на установке выполняются вдвоем. Вначале определяется нулевая точка весов; при необходимости весы юстируются при помощи регулировочных гаек на коромыслах. Затем произво-

дится взвешивание маятника, спокойно висящего в нижнем положении при размотанных нитях, т. е. определяется величина  $2T=mg$ . Нижнее положение маятника отмечается по шкале при помощи угольника при арретированных весах. Убедившись в горизонтальности оси маятника и при необходимости уравнив длину нитей, навивают нити на стержень, пока он не достигнет верхнего

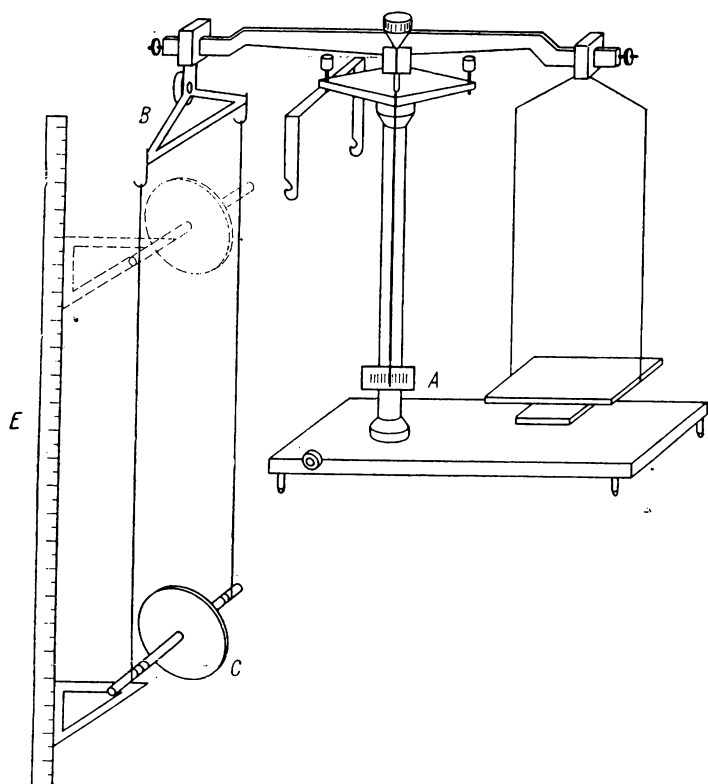


Рис. 9.9

положения, которое также отмечается по шкале при арретированных весах; разность отсчетов дает высоту  $h_1$ , с которой спускается маятник. Для увеличения точности измерений  $h_1$  следует выбирать порядка 1 м. Поддерживая маятник рукой таким образом, чтобы нити располагались в вертикальной плоскости, маятник аккуратно (без толчка) отпускают и одновременно включают секундомер; в момент удара секундомер останавливают и находят время опускания  $t_1$ . Измерения проводят не менее пяти раз. Затем, как и на установках типа А, определяют высоту и время подъема  $h_2$  и  $t_2$  также не менее пяти раз. По формулам (6) и (11) находят

величины ускорений при движении вверх и вниз и проверяют их совпадение в пределах ошибок измерений.

Затем приступают к взвешиванию движущегося маятника. Абсолютно необходимо, чтобы к моменту удара и рывка нитей весы были арретированы, а для этого нужно, чтобы один из работающих взвешивал, а другой арретировал весы до начала движения маятника и перед моментом удара. Для экономии времени при взвешивании движущегося маятника удобно заранее на чашку весов положить разновесы с общим весом, найденным по формуле (5):  $2T = m(g - a) = 2T_0 - ma$ , в которую подставлены уже найденные значения  $2T_0$  и  $a$ . При этом условии за небольшое время, имеющееся для измерений, удастся уточнить вес движущегося маятника с необходимой степенью точности. Эти измерения также проводятся не менее пяти раз как при движении маятника вниз, так и при движении вверх. Найденные взвешиванием значения силы натяжения нитей  $2T$  при движении маятника вверх и вниз сопоставляются с учетом ошибок измерения между собой, а также со значением, найденным по формуле (5).

Момент инерции маятника рассчитывается по формуле (7):  $J = mr^2(g/a - 1)$ . Перед подстановкой величины ускорения  $a$  в эту формулу необходимо оценить, каким методом ускорение может быть определено более точно: кинематическим, по формуле  $a = 2h/t^2$ , или динамическим, используя данные взвешивания  $a = (2T_0 - 2T)/m$ . Значение  $r$ , входящее в формулу (7), может быть уточнено (по указанию преподавателя) тем же способом, который используется при дополнительных измерениях на установках типа А (см. выше). После определения момента инерции маятника по формуле (7) следует рассчитать теоретическое значение величины момента инерции  $J_{\text{теор}}$  исходя из известных геометрических размеров маятника и масс его частей; полученные значения моментов инерции надо сопоставить между собой с учетом ошибок измерений.

По формулам (8) и (10) находят величины скоростей маятника до и после удара  $v_1$  и  $v_2$  и коэффициент восстановления скорости  $K_v = v_2/v_1$ . По формуле (16) определяют время удара  $\Delta t$ , по формуле (20) — максимальное увеличение силы натяжения нитей при ударе  $[\Delta(2T)]_{\text{max}}$  и сравнивают его с весом маятника.

Все измерения необходимо производить с большой осторожностью, так как маятник легко повредить, даже если незначительно погнуть его стержень, а весы — если удар произойдет при их незаарретированном состоянии. Если наматывание нитей при движении маятника вверх будет происходить несимметрично, с перекосом оси, или в направлении к концам стержня, маятник необходимо сразу же остановить во избежание его срыва с нитей и повреждения установки.

**Установка С. Принадлежности:** 1) установка с электронным секундомером; 2) штангенциркуль; 3) угольник.

**Измерения.** Маятник, применяемый в данном случае, отличается от тех, которые используются на установках типа А и В, тем,



что его момент инерции  $J$  можно изменять, надевая на диск сменные кольца  $K$  (рис. 9.10). Таким образом, измеряемое значение  $J$  складывается из момента инерции диска со стержнем  $J_0$  и момента инерции кольца  $J_K$ :  $J = J_0 + J_K$ .

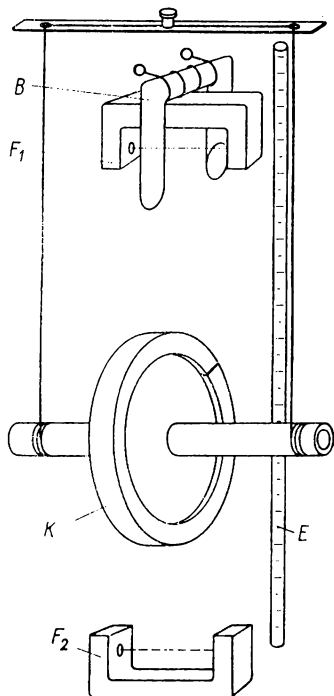


Рис. 9.10

Перед началом измерений необходимо убедиться, что длины нитей маятника одинаковы. При необходимости их длина может быть уравнена при помощи регулировочного винта. Затем нажатием клавиши «сеть» включают электрическую часть установки. Для подготовки прибора к измерениям надо нажать клавишу «сброс» и отжать клавишу «пуск», если она была в утопленном положении.

Намотав нити на стержень, устанавливают маятник в наивысшем положении, где он фиксируется с помощью электромагнитов  $B$ , притягивающих стальное сменное кольцо  $K$ . При нажатии клавиши «пуск» цепь питания электромагнитов разрывается, и маятник освобождается. Электронный секундомер включается при пересечении верхним краем сменного кольца  $K$  маятника светового пучка фотоэлектрического датчика  $F_1$ , установленного вблизи верхней точки движения. Выключение секундомера происходит, когда нижний край сменного кольца пересекает световой пучок второго

датчика  $F_2$ , расположенного вблизи низшей точки движения. Время опускания маятника  $t$  считывается с цифрового табло электронного секундомера. Записав показания секундомера, нажимают клавишу «сброс», отжимают клавишу «пуск» и повторяют измерение. Расстояние  $h$ , которое проходит маятник, отсчитывается по шкале при помощи угольника следующим образом. Вначале, удерживая маятник рукой, отмечают угольником на шкале то положение нижнего края сменного кольца, при котором включается секундомер, а затем, размотав нити, отмечают угольником положение верхнего края кольца, соответствующее выключению секундомера. Измерив при помощи штангенциркуля внешний диаметр кольца, добавляют его к полученной разности отсчетов по шкале. Измерения  $t$  и  $h$  повторяют по 8—10 раз с каждым из трех сменных колец, надеваемых поочередно на диск маятника. Затем рассчитывают средние значения и стандартные отклонения  $t$  и  $h$ .

По формуле (6) находят величины ускорений  $a$  для всех трех значений момента инерции маятника, затем по формуле (7) — сами моменты инерции; рассчитывают ошибки найденных величин. Масса маятника, входящая в формулу (7), определяется как сумма масс его частей; эти массы указаны непосредственно на этих частях с точностью до 0,01 г. Радиус  $r$ , необходимый для расчета, определяется при помощи штангенциркуля и может быть уточнен (по указанию преподавателя) тем же способом, что и при дополнительных измерениях на установках типа А (см. выше).

Затем, измерив штангенциркулем размеры диска маятника и съемных колец, следует рассчитывать теоретические значения моментов инерции для всех трех случаев и сравнить их в пределах ошибок с измеренными экспериментально. Теоретические значения моментов инерции могут быть найдены по формулам (вывести их самостоятельно!)

$$J_T = J_{OT} + J_{KT}, \quad (21)$$

$$J_{OT} = m_1 \frac{r_1^2 + r^2}{2} + m_2 \frac{r^2 + r_2^2}{2}, \quad (22)$$

$$J_{KT} = m_K \frac{r_2^2 + r_K^2}{2}, \quad (23)$$

где  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_K$  — массы стержня, диска и сменного кольца,  $r_1$  и  $r_2$  — внутренний и внешний радиусы пустотелого стержня,  $r$  — внешний радиус диска,  $r_K$  — внешний радиус кольца. Заметим, что в данном случае надо пользоваться непосредственно измеренным радиусом стержня  $r$ , а не его уточненным кинематическим значением, входящим в формулу (7). При анализе ошибок измерений следует, как обычно, пренебречь малыми ошибками.

*Литература:* [1] — § 31—34; [3] — § 87—90, 92, 94; [4] — § 50—60.

## Измерение реактивной силы

**Принадлежности:** 1) установка, 2) секундомер, 3) мерный сосуд.

Если некоторая система выбрасывает часть своей массы, а выброшенная часть изменяет при этом свой импульс, то на систему действует реактивная сила, равная изменению импульса выброшенной части за единицу времени, т. е.

$$\Phi = -\mu(v - v_s),$$

где  $\Phi$  — реактивная сила,  $\mu$  — масса, выбрасываемая в единицу времени,  $v$  — скорость выбрасываемых частиц,  $v_s$  — скорость системы.

Аналогичная ситуация возникает при захвате системой массы извне. Поэтому масса системы может и не изменяться. Реактивная сила при этом возникает за счет разности скоростей захватываемых и выбрасываемых частиц вещества.

**Описание установки.** Схематический вид установки приведен на рис. 9.11. Основная ее часть — металлический маятник  $AB$ . Он может колебаться в вертикальной плоскости, опираясь на нож призмы в точке  $C$ . Нижняя часть маятника — полая трубка, имеющая на конце  $A$  патрубок, внутреннее сечение которого равно  $S$ . Верхняя часть представляет собой сплошной стержень, по которому может перемещаться и закрепляться на нем цилиндр  $D$  весом  $T$ . Вблизи точки  $C$  трубка имеет отросток, ось которого параллельна лезвию ножа призмы и который соединен с мягким резиновым шлангом. По шлангу подается вода, которая вытекает из патрубка, образуя струю. Появляющаяся при этом реактивная сила отклоняет маятник от вертикального положения. При постоянном потоке воды угол отклонения стержня постоянен.

Постоянство потока обеспечивается тем, что вода в маятник поступает по трубке 2 из специального сосуда  $M$ . Поступающая из водопровода по трубке 1 вода наполняет этот сосуд до постоянного уровня, излишек воды сливается в раковину по трубке 3. На трубке 2 имеется пружинный зажим  $K$ , при помощи которого можно перекрывать ток воды в маятник. Вода, вытекающая из маятника, течет по желобу  $E$  и собирается в мерный сосуд  $G$ .

**Теория.** Вода втекает в маятник, движется по трубке маятника и вытекает через патрубок по трем взаимно перпендикулярным направлениям, поэтому реактивная сила в направлении, противоположном скорости вытекающей воды, будет равна

$$\Phi = \mu v, \quad (1)$$

где  $\mu$  — масса вытекающей за единицу времени воды,  $v$  — скорость вытекающей воды. Реактивная сила, возникающая за счет втекающей воды, компенсируется реакцией опоры. Кроме реак-

тивной силы  $\Phi$  на маятник будет действовать сила тяжести маятника  $P$  (с водой, но без цилиндра  $D$ ) и сила тяжести  $T$  цилиндра (см. рис. 9.11).

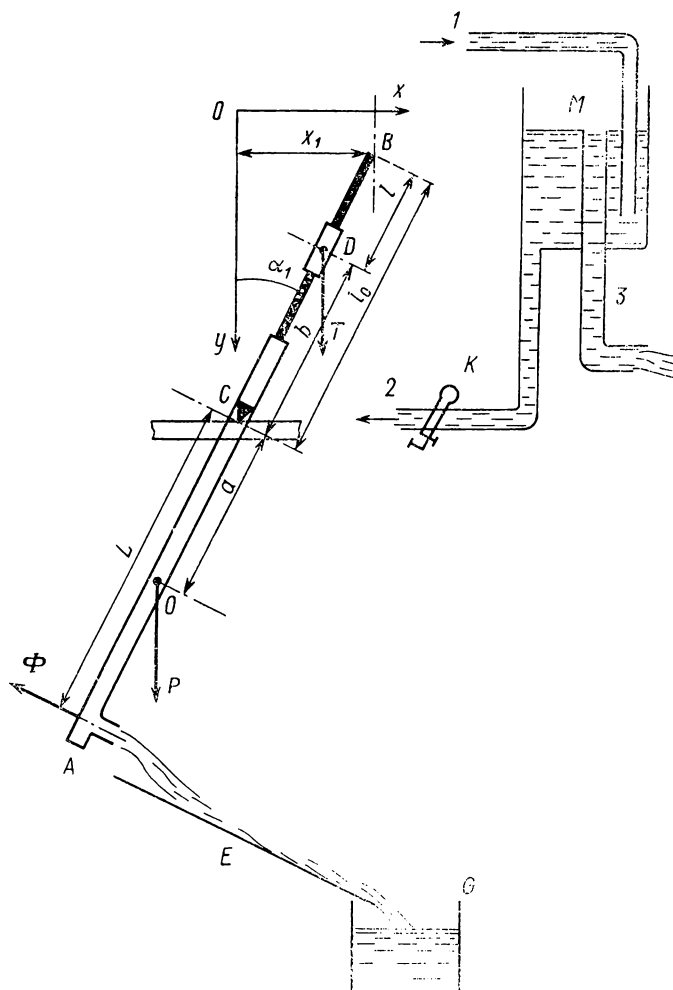


Рис. 9.11

Пусть расстояния точек приложения сил  $\Phi$ ,  $P$ ,  $T$  от оси вращения маятника соответственно будут  $L$ ,  $a$ ,  $b$ . Уравнение моментов сил относительно оси вращения маятника может быть написано в виде

$$\Phi L + Tb \sin \alpha = Pa \sin \alpha, \quad (2)$$

где  $\alpha$  — угол отклонения маятника от вертикали.

Если измерить углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  отклонения маятника при двух различных положениях  $b_1$  и  $b_2$  цилиндра  $D$ , то из уравнений (2), исключая  $Pa$ , получим

$$\Phi = \frac{T}{L} (b_2 - b_1) \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}. \quad (3)$$

Для дальнейших вычислений удобно заменить величины  $b_1$  и  $b_2$  расстояниями от точки центра масс цилиндра до верхней точки конца маятника, которые измеряются непосредственно. Обозначая их соответственно через  $l_1$ ,  $l_2$ , а через  $l_0$  — расстояние от точки опоры стержня до его верхнего конца, можем написать

$$b_1 = l_0 - l_1, \quad b_2 = l_0 - l_2, \\ \sin \alpha = \frac{x_1}{l_0}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{x_2}{l_0}, \quad (4)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — отклонения верхнего конца стержня по горизонтали.

Из уравнений (3) и (4) получим

$$\Phi = \frac{T}{L l_0} (l_1 - l_2) \frac{x_1 x_2}{x_2 - x_1}. \quad (5)$$

Правую часть соотношения (1) можно определить независимым от  $\Phi$  способом. Сравнение полученных величин будет являться проверкой соотношения (1).

Пусть средняя (по сечению  $S$  патрубка) скорость истечения воды будет  $v$ . Для массы воды, вытекающей за единицу времени, пренебрегая сжатием струи, можем написать

$$\mu = S \rho v, \quad (6)$$

где  $\rho$  — плотность воды.

Для величины реактивной силы получим

$$\mu v = S \rho v^2. \quad (7)$$

Масса выбрасываемой в единицу времени воды может быть определена по объему воды  $Q$ , вытекающей за время  $t$ :

$$S \rho v = \frac{Q}{t} \rho. \quad (8)$$

Из уравнений (7) и (8) получим

$$\mu v = \frac{\rho}{S} \left( \frac{Q}{t} \right)^2. \quad (9)$$

**Измерения.** Значения величин  $L$ ,  $l_0$  и  $T$ , необходимые для вычисления  $\Phi$ , приведены на установке. Последовательность измерений следующая. Цилиндр  $D$  закрепляют в одном из его положений, маятник устанавливают так, чтобы он мог свободно колебаться. При вертикальном положении маятника по миллиметровой шкале отсчитывают расстояние  $l_1$ . Медленно открывают кран во-

допровода и при установившемся отклонении положения маятника по миллиметровой шкале отсчитывают расстояние  $x_1$ .

Пружинным зажимом (не закрывая кран водопровода) прекращают доступ воды в маятник. Цилиндр  $D$  закрепляют в другом положении и вновь, повторяя те же операции, производят измерения, открыв доступ воды в маятник. Не следует помещать цилиндр  $D$  слишком близко к оси вращения маятника, это уменьшает точность измерения величины  $x$ . Не рекомендуется закреплять его и далеко от этой оси, так как в этом случае маятник при отклонении может опираться гранью своей призмы на подставку.

По полученным данным, пользуясь формулой (5), вычисляют величину силы  $\Phi$ . За истинное значение принимают среднее арифметическое из трех отдельных измерений силы  $\Phi$ .

Для определения реактивной силы, выражаемой правой частью соотношения (1), собирают вытекающую воду в мерный сосуд. Не менее трех раз, пользуясь секундомером, определяют объем воды, вытекающий, например, за 10 секунд.

Зная величину  $S$  (дается на установке), по формуле (9) вычисляют величину реактивной силы. Производят сравнение полученных величин для правой и левой частей равенства (1).

*Литература:* [1] — § 37; [2] — § 21; [3] — § 123, 124; [4] — § 24—27, 109, 110.

### *Лабораторная работа 13*

#### **Проверка закона сохранения момента количества движения**

**Принадлежности:** 1) установка, 2) секундомер.

**Описание установки:** схема установки без деталей дана на рис. 9.12. Колонка  $AA'$  с закрепленным в ней стержнем  $BB'$  может вращаться в шарикоподшипниках вокруг вертикальной оси  $OO'$ . По стержню могут скользить два цилиндра  $C$  одинаковой массы. По колонке может перемещаться кольцо  $K$  с пластинкой  $G$ . Подвесив пластинку на стержнеке  $L$ , нитями  $T_0$ , пропущенными через отверстия в диске  $D$ , цилиндры удерживаются у поверхности колонки. К другому концу стерженька прикреплена переброшенная через блок  $M$  нить  $T$  с грузом массы  $m$  на конце. Нить навивает виток к витку на колонку, охватывая надетую на стержнеке пластинку  $G$ . Опускаясь, груз приводит колонку во вращение. В момент, когда груз останавливается, он смещает стержнеке, кольцо падает на диск  $D$ , цилиндры освобождаются. Малая сила трения покоя между цилиндрами и стержнем не может служить центростремительной силой для цилиндров, и они очень быстро («мгновенно») соскальзывают к концам стержня. Это увеличивает момент инерции системы и уменьшает по закону сохранения момента количества движений ее угловую скорость. После этого нить начинает навиваться на колонку, груз поднимается вверх, не дохо-

дя, однако, до своего первоначального положения — потенциальная энергия его уменьшается.

Это уменьшение вызвано превращением механической энергии в тепловую при неупругом ударе цилиндров об упоры, наличием сил трения при движении системы и др.

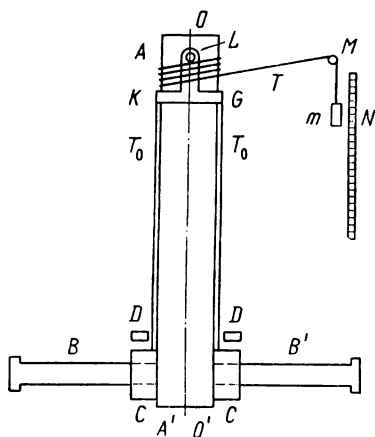


Рис. 9.12

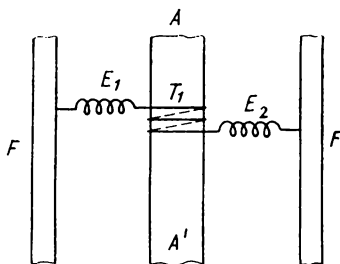


Рис. 9.13

По шкале  $N$  измеряются расстояния, проходимые грузом при его опускании и подъеме. На диске имеются не указанные на рисунке специальные крепления. Ими можно закрепить, не пользуясь кольцом с нитями, цилиндры у поверхности колонки. Систему можно превратить в крутильный маятник. Для этого используются две пружины  $E_1$  и  $E_2$ , связанные нитью  $T_1$ . Нить навивается (несколько витков) на колонку  $AA'$ , а концы пружин закрепляются на неподвижной раме  $F$  (рис. 9.13). При повороте колонки на небольшом угле из положения равновесия одна часть нити удлиняется, а другая — укорачивается. Это приводит к изменению деформаций пружин, в результате чего возникает момент сил, пропорциональный углу отклонения. Необходимо только следить за тем, чтобы пружины не провисали, т. е. при всех углах отклонения были бы в натянутом состоянии.

**Теория.** Все время движения рассматриваемой механической системы может быть разбито на три стадии.

В первой система, имея наименьший момент инерции, начинает ускоренное движение. Во второй происходит изменение ее момента инерции. Он быстро увеличивается и становится наибольшим. Угловая скорость вращения при этом уменьшается. В третьей стадии система, имея наибольший момент инерции, вращается замедленно и останавливается. Изменение угловой скорости вращения системы со временем может быть изображено примерно так, как показано на рис. 9.14. Возрастающая ветвь от нуля до точки  $A$

отвечает первой стадии. Убывающая ветвь, от точки  $B$  до точки  $C$ , отвечает третьей стадии. За незначительное время  $\tau$ , даваемое отрезком  $DL$ , угловая скорость быстро уменьшается. Участок кривой  $AB$  соответствует второй стадии, стадии увеличения момента инерции системы.

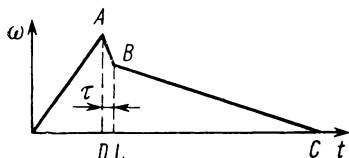


Рис. 9.14

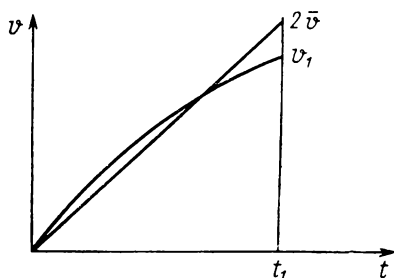


Рис. 9.15

Рассмотрим сначала случай, в котором цилиндры закреплены около колонки и не смещаются вдоль стержня в процессе движения. Момент инерции колонки обозначим в этом случае через  $J_1$ . Угол поворота колонки будем обозначать через  $\varphi$ , а соответствующую угловую скорость  $\dot{\varphi}$  — через  $\omega$ . Координату, описывающую положение (высоту) груза, обозначим через  $z$ , (ось  $z$  направив вниз), а соответствующую скорость груза  $\dot{z}$  — через  $v$ . Эти координаты, скорости и соответствующие им ускорения связаны кинематическими соотношениями

$$z = r\varphi, \quad v = r\omega, \quad \dot{v} = r\dot{\omega}, \quad (1)$$

где  $r$  — радиус колонки. Силу натяжения нити обозначим через  $F$ .

При вращении колонки возникает тормозящий момент сил, обусловленный трением в подшипниках колонки, в оси блока нити, сопротивлением воздуха. В общем случае этот момент зависит от скорости  $\omega$ . Обозначим его через  $M_{\text{тр}}$ .

Уравнения движения для колонки и груза будут

$$J_1 \ddot{\varphi} = rF + M_{\text{тр}}, \quad (2)$$

$$m\ddot{z} = mg - F. \quad (3)$$

Исключая силу натяжения и используя кинематические соотношения (1), получим уравнение движения колонки

$$(J_1 + mr^2) \ddot{\varphi} = rmg + M_{\text{тр}}. \quad (4)$$



В данной установке  $J_1 \gg mr^2$ , поэтому во всех дальнейших соотношениях будем пренебрегать величиной  $mr^2$  по сравнению с  $J_1$ . При этом соотношение (4) запишем как

$$J_1 \ddot{\varphi} = rmg + M_{\text{тр}}. \quad (5)$$

Умножим левую и правую части уравнения (5) на  $d\varphi = \omega dt$ . После интегрирования по  $\varphi$  в пределах от  $\varphi_0$  до  $\varphi_1$  и по  $t$  в пределах  $t=0$  до  $t=t_1$ , получим

$$rmg \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi - \frac{1}{2} J_1 \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} (\omega^2) dt = - \int_0^{t_1} M_{\text{тр}} \omega dt. \quad (6)$$

В соотношении (6)  $\varphi_0$  относится к самому высокому положению груза (начальное положение) и  $\varphi_1$  — к самому низкому положению. Моменты  $t=0$  относятся к началу движения  $\varphi_0 = \varphi(0)$ ,  $\omega(0)=0$ , а момент  $t_1$  — к достижению грузом наиболее низкого положения. Соответствующую этому положению скорость обозначим через  $\omega_1$ , т. е.  $\omega_1 = \omega(t_1)$ . Расстояние, проходимое при этом грузом, обозначим через  $H_1$ . С учетом кинематического соотношения  $H_1 = (\varphi_1 - \varphi_0)r$  соотношение (6) запишется в виде

$$mgH_1 - \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = - \int_0^{t_1} M_{\text{тр}} \omega dt. \quad (7)$$

Рассмотрим правую часть соотношения (7), представив зависимость момента сил трения от скорости в виде

$$M_{\text{тр}} = \pm \alpha - \beta \omega \pm \gamma \omega^2 - \dots \quad (8)$$

Знаки в (8) выбираются таким образом, чтобы каждый член (8) оказывал тормозящее воздействие.

Зависимость скорости  $v$  от времени  $t$  качественно представлена на рис. 9.15. Будем исходить из того, что ускорение при возрастании скорости меняется незначительно по сравнению с ускорением в начале движения, т. е. что движение груза почти равноускоренное. (На рис. 9.15 это различие для наглядности сделано значительным). Путь  $H_1$ , проходимый грузом, равен площади под кривой  $v(t)$ . С другой стороны, можно ввести среднюю скорость  $\bar{v}$  исходя из соотношения  $H_1 = \bar{v} \cdot t_1$ . Если движение почти равноускоренное, то реальную зависимость скорости от времени  $v(t)$  можно заменить линейной зависимостью  $v = \frac{2\bar{v}}{t_1} \cdot t$ , при этом  $v_1 = 2\bar{v}$  и  $2\bar{v}t_1 = 2H_1$ .

Рассмотрим в указанном приближении интеграл вида

$$\int_0^{t_1} v^n \cdot v dt = \left( \frac{v_1}{t_1} \right)^{n+1} \int_0^{t_1} t^{n+1} dt = \frac{2}{n+2} v_1^n H_1. \quad (9)$$

С учетом (9) интеграл в правой части (6) можно будет представить в виде

$$-\int_0^{t_1} M_{\text{тр}} \omega dt = \left( \frac{\alpha}{r} + \frac{2}{3r} \beta \omega_1 + \frac{2}{4r} \gamma \omega_1^2 + \dots \right) H_1 = f(\omega_1) H_1, \quad (10)$$

где  $f(\omega_1)$  обозначает выражение в скобках. Из (10) видно, что в указанном приближении работа сил трения на первом этапе однозначно определяется конечной скоростью  $\omega_1$  и высотой  $H_1$ .

С учетом (10) соотношение (7) запишется в виде

$$mgH_1 - \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = f(\omega_1) H_1. \quad (11)$$

После достижения наиболее низкого положения нить начнет наматываться в другом направлении и движение груза будет замедленным с начальной скоростью  $\omega(0) = \omega_1$  (при этом предполагается, что цилиндры в нижнем положении не сместились). Пусть груз при обратном движении поднимается на высоту  $h_1 < H_1$ . Проводя аналогичные рассуждения, мы получим соотношение типа (11), но с измененным знаком в левой части

$$\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 - mgh_1 = f(\omega_1) h_1. \quad (12)$$

Соотношения (11) и (12) представляют систему уравнений с двумя неизвестными:  $\omega_1$  и  $f(\omega_1)$ . Исключая  $f(\omega_1)$ , получим

$$J \omega_1 = 2 \sqrt{\frac{mg J_1 H_1 h_1}{H_1 + h_1}}. \quad (13)$$

Аналогичное соотношение можно получить для случая, когда цилиндры находятся все время в крайних положениях. Обозначая соответствующие величины индексом «2», получим

$$J_2 \omega_2 = 2 \sqrt{mg J_2 \frac{H_2 h_2}{H_2 + h_2}}. \quad (14)$$

Рассмотрим, что происходит при изменении направления намотки нити. Эта ситуация изображена на рис. 9—16. Окружность с точками  $A$ ,  $B$ ,  $C$  изображает след поверхности колонки, на кото-

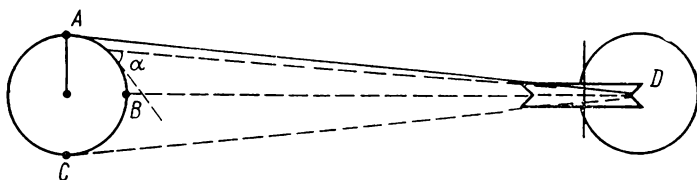


Рис. 9.16

рую наматывается нить. Если закрепленный на колонке конец нити находится в точке  $A$ , определяемой касательной для прямой, проведенной из точки  $D$ , то при дальнейшем движении кинематические соотношения (1) не будут выполняться. В момент прохождения концом нити положения, обозначенного точкой  $B$ , скорость груза станет равной нулю. При перемещении конца нити от точки  $B$  к точке  $C$  скорость груза будет увеличиваться, но движение будет в другом направлении. После прохождения положения, обозначенного точкой  $C$ , кинематические соотношения примут вид

$$z - z_1 = r(\varphi_1 - \varphi), \quad v = -r\omega, \quad \dot{v} = -r\dot{\omega}. \quad (15)$$

Когда конец нити будет проходить участок окружности  $ABC$  (рис. 9.16), то натяжение нити будет существенно больше, чем для моментов времени, когда выполняется соотношение (1) или (15), так как это натяжение за время, равное половине оборота колонки, должно существенно изменить импульс груза. Пусть за это же время цилиндры успевают сместиться из положения «1» в положение «2», т. е. момент инерции изменится от значения  $J_1$  до значения  $J_2$ . Обозначим моменты времени, когда конец нити проходит положения  $A$ ,  $B$ ,  $C$  через  $t_A$ ,  $t_B$  и  $t_C$  соответственно, а угол между направлением касательной к следу колонки  $ABC$  и направлением натяжения нити — через угол  $\alpha$ , тогда изменение момента импульса колонки на интервале времен  $(t_A, t_C)$  будет равно

$$J_2\omega_2 - J_1\omega_1 = \int_{t_A}^{t_C} rF \cos \alpha dt. \quad (16)$$

Для оценки значения интеграла в правой части (16) рассмотрим интеграл

$$\int_{t_A}^{t_B} (mg - F) dt = -mv_1 = -mr\omega_1. \quad (17)$$

Из (17) следует, что

$$\int_{t_A}^{t_B} rF dt = rm g(t_B - t_A) + mr^2\omega. \quad (18)$$

Обозначим момент времени, когда груз начинает опускаться,  $t=0$ , тогда  $t_B = t_1$ , т. е. времени опускания груза. Учитывая, что для  $0 < t < t_B$   $F \approx mg$ , из (5) (пренебрегая моментом сил трения) получим

$$rm g(t_B - t_A) = J_1 \ddot{\varphi}(t_B - t_A) = J_1 \omega_1 \frac{t_B - t_A}{t_1} \ll J_1 \omega_1, \quad (19)$$

так как  $t_B - t_A \ll t_1$ .

Второй член в (18) также мал, так как  $r^2m \ll J_1$ . Аналогичную оценку можно сделать для интервала времени  $(t_B, t_C)$ :

$$\int_{t_B}^{t_C} rFdt = rm g (t_C - t_B) - mr^2\omega_2. \quad (20)$$

Так как  $|\cos \alpha| \leq 1$ , то из малости (19) и (20) следует малость (по сравнению с  $J_1\omega_1$  или  $J_2\omega_2$ ) правой части (16). Таким образом, получаем в условиях данной лабораторной работы приближенное равенство

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2. \quad (21)$$

Соотношение (21) имеет вид закона сохранения момента количества движения.

Целью работы является проверка соотношения (21) в условиях данного эксперимента.

С учетом (13) и (14) соотношение (21) сводится к соотношению

$$\frac{J_1 H_1 h_1}{H_1 + h_1} = \frac{J_2 H_2 h_2}{H_2 + h_2}. \quad (22)$$

В (22)  $h_2$  — высота подъема груза после изменения момента инерции при начальной высоте  $H_1$ ,  $H_2$  — высота, с которой должен опускаться груз, чтобы он поднялся бы на ту же высоту при неизменном моменте инерции  $J_2$ .

Для крутильного маятника для двух значений момента инерции  $J_1$  и  $J_2$  (при неизменном законе для момента упругих сил) периоды колебаний  $T_1$  и  $T_2$  удовлетворяют соотношению

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}. \quad (23)$$

С учетом (23) соотношение (22) принимает вид

$$\frac{T_1^2 H_1 h_1}{H_1 + h_1} = \frac{T_2^2 H_2 h_2}{H_2 + h_2}. \quad (24)$$

Соотношение (24) и проверяется в данной лабораторной работе.

**Измерения.** Для определения периодов колебаний  $T_1$  и  $T_2$  при двух положениях цилиндров, отсоединив нить с грузом и используя две пружины, связанные нитью, создают колебательную систему (см. описание установки). Измеряют время  $N$  полных периодов колебаний ( $N \sim 10-20$ ). Вычисляют период одного колебания.

Прикрепив к колонке нить, привязанную к грузу и пропущенную через блок, отмечают на шкале  $N$  наиболее низкое положение груза — нулевую отметку высот. Закрепляют цилиндры в по-

ложении около колонки так, чтобы в процессе движения они не могли бы сдвинуться вдоль стержня. Аккуратно, виток к витку, навивают нить на колонку и отмечают на шкале высоту  $H_1$  — исходную высоту груза. Отпускают груз и отмечают высоту  $h_1$  поднятия груза после изменения направления движения.

Приводят систему в состояние, в котором цилиндры в нижнем положении смещаются вдоль стержня. Навивают нить на колонку до поднятия груза на исходную высоту  $H_1$ . Отпускают груз и замечают высоту  $h_2$  поднятия груза после изменения направления движения и увеличения момента инерции колонки.

Определяемые в процессе выполнения работы величины  $h_1$  и  $h_2$  следует измерять несколько раз и в дальнейших расчетах использовать их средние значения. Определяют погрешности  $\Delta h_1$ ,  $\Delta h_2$ . Закрепляют цилиндры в крайних положениях и навивают нить до поднятия груза на высоту  $H_a = H_1$ . Отпускают груз и определяют высоту  $h_a$  поднятия груза. Повторяют опыт, поднимая груз на высоту  $H_b = 0,5 H_1$ , определяя соответствующую высоту  $h_b$ . Вычисляют «производную»

$$\frac{\Delta H}{\Delta h} = \frac{H_a - H_b}{h_a - h_b}. \quad (25)$$

Определяют первое приближение для  $H_2$

$$\tilde{H}_2 = H_b + \frac{\Delta H}{\Delta h} (h_2 - h_b). \quad (26)$$

Для полученного значения  $\tilde{H}_2$  определяют  $\tilde{h}_2$ . Если разница между  $\tilde{h}_2$  и  $h_2$  превышает погрешность определения  $h_2$ , то определяют новые значения  $H_b = \tilde{H}_2$  и  $h_b = \tilde{h}_2$ . Подставляя новые значения  $H_b$  и  $h_b$  в формулу (26), определяют следующее приближение для  $H_2$  ( $\Delta H / \Delta h$  при этом не пересчитывается). Этот процесс последовательного приближения повторяют до тех пор, пока различие между  $\tilde{h}_2$  и  $h_2$  не станет порядка погрешности  $\Delta h_2$ . Для дальнейшего уточнения  $H_2$  следует провести несколько измерений величины  $\tilde{h}_2$  для одного и того же (последнего) значения  $\tilde{H}_2$ . В качестве нового значения  $h_b$  берется среднее значение  $\tilde{h}_2$ , а в качестве нового значения  $H_b$  берется используемое при этом значение  $\tilde{H}_2$ . Для уточнения  $H_2$  используется формула (26). В качестве ошибки  $\Delta H_2$  можно взять  $(\Delta H / \Delta h) \cdot \Delta h_2$ , где  $\Delta h_2$  — погрешность  $h_2$ .

Используя определенные величины, проверяют равенство (24), которое при справедливости всех сделанных допущений должно выполняться в пределах возникающих погрешностей измерений.

*Литература:* [1] — § 24, 25; [2] — § 32—34; [3] — § 89, 90, 92, 94, 95; [4] — § 50—57, 59.

## ГЛАВА 10

### СИЛЫ ТРЕНИЯ

**Введение.** Если твердое тело скользит по поверхности, то между телом и поверхностью возникает сила трения скольжения. Сила трения, действующая на тело, направлена противоположно относительной скорости этого тела. На поверхность при этом действует такая же сила, но противоположно направленная. Если соприкасающиеся поверхности достаточно гладкие, то сила трения скольжения  $F_{\text{тс}}$  пропорциональна силе нормального давления  $N$  и практически не зависит от скорости. В этом случае выполняется закон

$$F_{\text{тс}} = k \cdot N, \quad (1)$$

безразмерный множитель  $k$  называется коэффициентом трения.

Если твердое тело лежит на поверхности, то оно может оставаться в покое и в том случае, когда на тело действуют достаточно малые тангенциальные силы, т. е. силы, действующие вдоль поверхности. В этом случае между телом и поверхностью возникает сила трения покоя, или «неполная сила трения», которая компенсирует приложенную силу.

При возрастании внешней силы увеличивается и сила трения покоя. Однако сила трения покоя не может расти беспредельно. Существует максимальная сила трения покоя, которая для достаточно гладких поверхностей пропорциональна силе нормального давления. Максимальная сила трения покоя  $F_{\text{мах}}$  несколько меньше  $F_{\text{тс}}$ , но для достаточно гладких поверхностей это различие может быть несущественным. Если внешняя сила превысит  $F_{\text{мах}}$ , то тело начнет скользить по поверхности.

Рассмотрим пример. Пусть некоторый цилиндр раскручен относительно своей оси. Если этот цилиндр опустить на горизонтальную поверхность, то цилиндр покатится по этой поверхности. Силой, ускоряющей цилиндр в горизонтальном направлении, является сила трения скольжения, возникающая в точках соприкосновения цилиндра с плоскостью. Если скорость соприкасающихся с плоскостью точек цилиндра направлена влево, то сила трения скольжения будет направлена вправо. Эта сила и будет ускорять цилиндр. Момент этой силы будет уменьшать угловую скорость вращения. В некоторый момент времени скорость соприкасаю-

щихся с плоскостью точек цилиндра станет равной нулю. После этого цилиндр будет катиться по плоскости без проскальзывания.

Даже при отсутствии внешних сил скорость поступательного движения цилиндра тем не менее будет постепенно уменьшаться. Это связано с возникновением еще одного вида трения — трения качения. Трение качения является результатом того, что деформация плоскости и цилиндра не является абсолютно упругой. Возникновение хотя и слабых остаточных деформаций приводит к тому, что реакция плоскости опоры несимметрична относительно вертикальной плоскости, проходящей через ось цилиндра. В результате возникают момент сил реакции, замедляющий вращение, и результирующая горизонтальная сила, подобная силе трения покоя, замедляющая поступательное движение цилиндра.

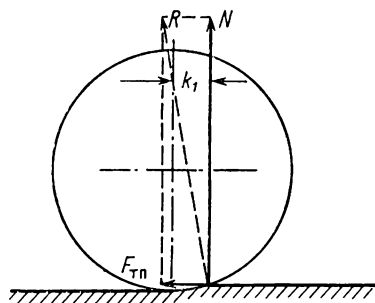


Рис. 10.1

Будем называть момент (относительно оси цилиндра) сил нормальной реакции опоры моментом силы трения качения и обозначать через  $M_{\text{тк}}$ , а тангенциальную силу — силой трения покоя и обозначать через  $F_{\text{тп}}$  (см. рис. 10.1).

При малых остаточных деформациях и достаточно гладких поверхностях можно считать, что момент силы трения качения пропорционален силе нормального давления

$$M_{\text{тк}} = k_1 \cdot N, \quad (2)$$

где коэффициент силы трения качения  $k_1$  имеет размерность длины. Горизонтальная составляющая  $F_{\text{тп}}$  определяется из условия отсутствия проскальзывания.

Уравнения движения в случае качения цилиндра по горизонтальной поверхности в рассматриваемой ситуации будут

$$J_0 \dot{\varphi} = -M_{\text{тк}} + R F_{\text{тп}}, \quad (3)$$

$$m \ddot{x} = -F_{\text{тп}}, \quad (4)$$

где  $J_0$  — момент инерции цилиндра относительно его оси,  $m$  — масса цилиндра,  $R$  — радиус цилиндра,  $\varphi$  — угол поворота, связан-

ный с горизонтальной координатой центра цилиндра кинематическим соотношением  $x=R\varphi$  цилиндра. Исключая из (3) с помощью (4)  $F_{\text{тп}}$  и используя кинематическое соотношение  $\ddot{x}=\ddot{\varphi}$ , получим

$$(J_0 + mR^2)\ddot{\varphi} = -M_{\text{тк}}. \quad (5)$$

Уравнение (5) имеет вид уравнения движения относительно мгновенной оси. Решая уравнение (5) и используя (4), получим

$$F_{\text{тп}} = \frac{mR}{J_0 + mR^2} M_{\text{тк}}. \quad (6)$$

При движении тела в воздухе или жидкости возникает еще один вид трения, так называемое «жидкое» трение. Для достаточно малых скоростей и обтекаемых форм (шар) эту силу трения можно считать пропорциональной скорости и направленной против скорости движения тела.

В случае несимметричной формы тела может возникнуть момент силы, действующий со стороны среды на тело.

При достаточно больших скоростях и определенных формах тела может возникнуть сила, перпендикулярная движению (подъемная сила крыла самолета). Составляющую силы, направленную против движения, в этом случае называют силой лобового сопротивления. В широком интервале достаточно больших скоростей силу любого сопротивления можно считать пропорциональной квадрату скорости.

*Литература к главе 10:* [1] — глава I (§ 36); [2] — глава II (§ 17); [3] — глава VII; [4] — главы V, IX, XIV (§ 112).

## *Лабораторная работа 14*

### **Определение коэффициентов трения скольжения**

**Описание установки.** В данной работе используется метод, предложенный В. А. Желиговским. Установка состоит (рис. 10.2) из доски  $A$  с зажимом  $G$ , «рейшины», состоящей из линейки  $B$ , планки  $E$  и винта  $D$ , и пластинки  $C$ . Пластинка кладется на горизонтальную поверхность доски  $A$  так, что одна боковая поверхность пластинки соприкасается с линейкой  $B$ . Коэффициент трения определяется для силы трения, возникающей между пластиной  $C$  и ребром линейки  $B$ .

Пусть при равномерном движении «рейшины» вдоль края доски  $A$  пластина  $C$  движется поступательно и равномерно, скользя при этом по горизонтальной поверхности доски  $A$  и ребру линейки  $B$ .

На пластинку  $C$  в вертикальном направлении действуют две силы: сила тяжести и сила нормальной реакции со стороны горизонтальной поверхности доски  $A$ . В горизонтальных плоскостях дей-



ствуют сила трения между пластинкой  $C$  и доской  $A$ , сила нормальной реакции со стороны линейки  $B$  и сила трения между пластинкой  $C$  и линейкой  $B$ . Все эти силы, кроме силы тяжести, вообще говоря, создают моменты сил относительно осей, проходящих через центр масс пластинки  $C$ . Например, сила трения скольжения между пластинкой  $C$  и линейкой  $B$  создает момент сил относительно вертикальной оси. Этот момент должен компенсироваться моментом силы нормальной реакции со стороны линейки  $B$ . Линия действия равнодействующей нормальной реакции при этом не проходит через центр масс пластинки. (Смещение равнодействующей нормальной реакции обусловлено неоднородной деформацией соприкасающихся тел.)

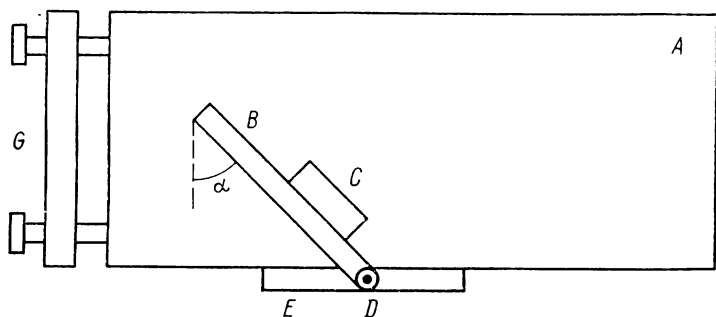


Рис. 10.2

При рассмотрении действия силы трения между пластинкой  $C$  и линейкой  $B$  можно мысленно ввести две одинаковые по величине и противоположные по направлению силы, приложенные к центру масс пластинки  $C$ . Пусть одна из введенных сил равна по величине и совпадает по направлению с силой трения между пластинкой и линейкой. При этом вторая из введенных сил вместе с силой трения составит пару сил, создающую момент сил относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс пластинки. Аналогичным образом можно поступить и по отношению к другим силам, приложенным к пластинке  $C$  и создающим моменты относительно осей, проходящих через центр масс пластинки. Ясно, что при равномерном поступательном движении пластинки  $C$  все моменты сил и все силы должны быть скомпенсированы.

Для наших целей достаточно рассмотреть условие компенсации для введенных указанным образом сил, действующих в горизонтальной плоскости. Таких сил будет три:  $F_1$  — сила, равная силе трения между пластинкой  $C$  и горизонтальной поверхностью доски  $A$ ,  $N$  — сила нормальной реакции со стороны линейки  $B$  и  $F$  — сила трения между пластинкой  $C$  и линейкой  $B$ . Эти три силы должны компенсировать друг друга.

На рис. 10.3 эти три силы представлены векторами  $F_1$ ,  $N$  и  $F$ . Прямая  $L_1L_2$  изображает траекторию движения центра масс пластинки  $C$ . Сила трения  $F_1$  направлена против движения. Пусть сила нормальной реакции составляет угол  $\varphi$  с направлением движения пластинки. При этом компенсация действия сил требует выполнения двух условий:

$$F_1 = \sqrt{N^2 + F^2} \text{ и } \frac{F}{N} = \operatorname{tg} \varphi \quad (1)$$

(угол  $\varphi$  не может быть отрицательным).

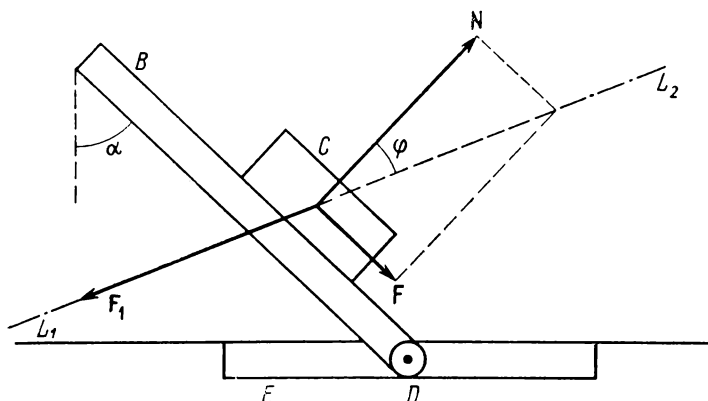


Рис. 10.3

Если на пластинку  $C$  поставить дополнительный груз, то увеличится сила нормального давления на горизонтальную поверхность доски  $A$  и, следовательно, возрастет сила трения  $F_1$ , что приведет к увеличению сил  $N$  и  $F$ .

Для определения коэффициента трения скольжения между пластинкой  $C$  и линейкой  $B$  достаточно учесть лишь второе условие компенсации сил. С учетом закона для силы трения скольжения

$$F = kN \quad (2)$$

получим

$$k = \operatorname{tg} \varphi. \quad (3)$$

При уменьшении коэффициента трения угол  $\varphi$  также уменьшается, при этом направление движения пластинки  $C$  стремится к направлению нормали  $N$ . С увеличением  $k$  угол  $\varphi$  растет, но он не может стать больше угла  $\alpha$ . При  $\varphi = \alpha$  пластинка не движется вдоль линейки. (Угол  $\varphi > \alpha$  может быть лишь при движении пластинки  $C$  к винту  $D$ , однако при этом изменится направление силы трения скольжения и условие компенсации сил не сможет быть выполнено.) То есть при  $k > \alpha$  пластинка не будет двигаться вдоль линейки, при этом вместо силы трения скольжения будет возни-

касть сила трения покоя, для которой соотношение (2) не будет иметь место. В этом случае  $\varphi = \alpha$  и силы  $N$  и  $F$  покоя могут быть найдены из условия компенсации (1).

Следовательно, угол  $\alpha$  должен быть установлен таким образом, чтобы выполнялось условие  $\operatorname{tg} \alpha > k$ . Если  $k < 1$ , то достаточно установить угол  $\alpha \approx \pi/4$ .

Для отметок начального и конечного положения центра масс пластинка имеет в своем геометрическом центре отверстие. Отметка производится карандашом через это отверстие на листе бумаги, положенном на доску и закрепленном зажимом  $G$ . Линейка рейшины сделана из уголкового дюралья, пластинка из латуни. На одной стороне пластинки укреплен слой резины, что позволяет измерить коэффициент трения скольжения для двух пар материалов, а именно: дюраль—латунь, дюраль—резина.

**Измерения.** Предварительно на плоскость доски накладывается и закрепляется лист бумаги. На бумагу помещается линейка рейшины, которая до упора сдвинута влево.

К поверхности линейки прикладывается пластинка. Осторожно, придерживая левой рукой рейшину и пластинку, отмечают остро отточенным карандашом начальное положение центра масс пластинки (точка  $L_1$ ).

Плавно и равномерно, прижимая планку к ребру доски, перемещают рейшину до упора вправо. Очень осторожно, не сдвигая при этом пластинку, отмечают новое положение центра масс (точка  $L_2$ ). Точки соединяют прямой — получают траекторию движения центра масс пластинки (прямая  $L_1L_2$ ). Необходимо получить не менее пяти таких прямых. Следует каждый раз несколько смещать начальное положение пластинки, чтобы траектории не располагались очень близко одна к другой.

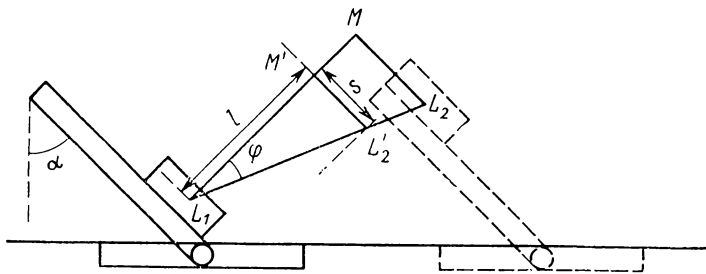


Рис. 10.4

Пользуясь рейшиной и угольником, проводят через начальные точки каждой траектории нормали к линейке рейшины (прямая  $L_1M$ ). На этих нормалях от каждой начальной точки ( $L_1$ ) откладывают расстояние  $l$  в 100 мм, отмечая точку  $M'$  (рис. 10.4).

Через полученные точки, пользуясь рейшиной, проводят прямые, перпендикулярные к  $L_1M$ , до пересечения с соответствующей

траекторией (прямая  $M'L_2'$ ). Измеряются длины  $s$  полученных отрезков (в миллиметрах) и вычисляются средние арифметические значения этих величин.

Коэффициент трения скольжения вычисляется по формуле

$$k = \frac{s}{l}. \quad (4)$$

Рекомендуется убедиться, что измерение величины силы трения между нижней поверхностью пластинки и поверхностью доски не изменяет искомую величину коэффициента трения. Для этого проводят еще одно измерение, положив на пластинку разновес массой 200 г. В этом случае необходимо быть особенно осторожным, чтобы при наложении и снятии разновеса и отметок карандашом точек центра масс не сдвинуть пластинку.

Производится измерение и вычисление коэффициента трения и для этого случая. Сопоставляют это значение с ранее полученной величиной.

Так как поверхности пластинки обрабатывались на обычном станке и не шлифовались, то профиль шероховатости не одинаков в разных направлениях и при движении пластинки в двух взаимно противоположных направлениях будут получаться несколько различные значения величины коэффициента силы трения. Необходимо следить, чтобы пластинка всегда касалась поверхности доски с бумагой одной и той же стороной. Эти измерения проводятся для скольжения пары дюраль—латунь. Обратную сторону бумаги можно использовать для измерений скольжения резины по дюралю. Следует следить, чтобы угол наклона линейки рейсшины в вертикали (угол  $\alpha$ ) был неизменным во все время измерений. Его величина не должна быть меньше  $15^\circ$ . Увеличив угол  $\alpha$ , можно убедиться, что искомая величина не зависит от угла наклона линейки рейсшины.

*Литература:* [1] — § 36; [2] — § 17; [3] — § 44—46, 49, 50; [4] — § 38—42. Юденич В. В. Лабораторные работы по теории механизмов и машин. М.: Высшая школа, 1962. С. 124.

## Лабораторная работа 15

### Определение коэффициентов трения качения

**Принадлежности:** 1) установка, 2) сменные детали к ней, 3) секундомер.

**Описание установки.** В работе пользуются методом, предложенным С. Ф. Лебедевым. Применяется (рис. 10.5) стальной цилиндр  $A$ , находящийся на плоской металлической плите  $B$ . Цилиндр закреплен в обойме  $C$ , которая имеет стержни  $D$  и  $E$ . Первый является стрелкой к шкале  $H$ . На втором, проходящем через

отверстие в плите, закреплен груз  $G$ . Подвижная часть установки может быть названа «маятником». При отклонении ее от положения равновесия она совершает нелинейные затухающие колебания. Ось цилиндра при этом движается поступательно, сам цилиндр вращается вокруг этой оси.

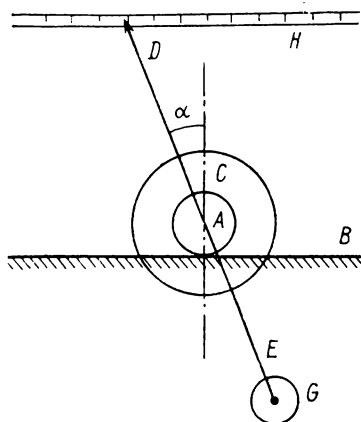


Рис. 10.5

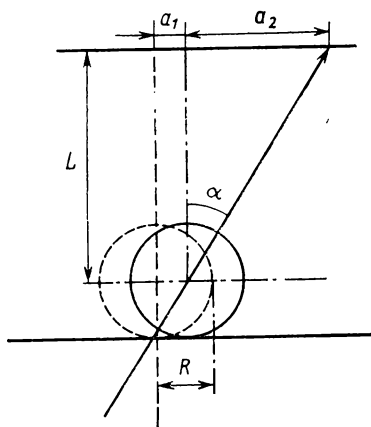


Рис. 10.6

Отклонение стрелки по шкале будет (рис. 10.6), следовательно, суммой двух отклонений:

$$a_1 = R\alpha, \quad (1)$$

$$a_2 = L \operatorname{tg} \alpha \approx L\alpha, \quad (2)$$

где  $\alpha$  — угол поворота цилиндра,  $R$  — его радиус,  $L$  — расстояние от оси цилиндра до шкалы,  $a_1$  — отклонение оси цилиндра,  $a_2$  — отклонение, вызванное вращением цилиндра вокруг его оси. Для суммарного отклонения получим

$$S = a_1 + a_2 = R\alpha + L \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

При малых углах  $\alpha$  ( $\alpha \ll 1$  рад)  $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ , в этом случае

$$S = (L + R)\alpha. \quad (4)$$

Для начального отклонения и отклонения после  $n$  полных периодов колебаний соответственно получим

$$\alpha_0 = \frac{S_0}{L + R}, \quad \alpha_n = \frac{S_n}{L + R}. \quad (5)$$

Уменьшение угла отклонения за известное число периодов колебаний маятника дает возможность (см. ниже) вычислить величину коэффициента трения качения.

Под цилиндр могут подкладываться плоские пластинки из различного материала. Это позволяет определять коэффициенты тре-

ния качения для различных пар материалов и сравнивать их между собой.

**Теория.** Выведем формулу для расчета на описанной установке коэффициента трения качения, считая силу трения не зависящей от скорости движения маятника. Воспользуемся законом сохранения энергии. При начальном отклонении маятника на угол  $\alpha_0$  его

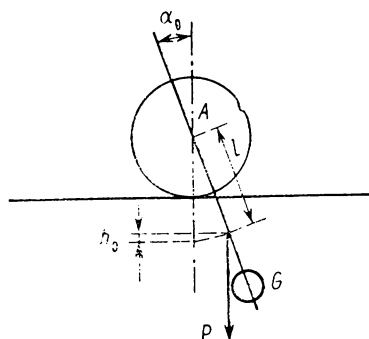


Рис 10.7

потенциальная энергия может быть представлена (см. рис. 10.7) в виде

$$E_0 = Ph_0 = Pl(1 - \cos \alpha_0), \quad (6)$$

где  $h_0$  — перемещение по вертикали точки центра тяжести маятника,  $P$  — его вес,  $l$  — расстояние между точкой центра тяжести и осью маятника. Через один полный период колебаний маятника аналогично получим

$$E_1 = Pl(1 - \cos \alpha_1), \quad (7)$$

где  $\alpha_1$  — угол отклонения маятника через один полный период колебаний. Уменьшение потенциальной энергии будет

$$\Delta E = 2Pl \left( \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \right), \quad (8)$$

при  $\alpha < 0.1$  радиана получим

$$\Delta E = 0.5 Pl (\alpha_0^2 - \alpha_1^2). \quad (9)$$

Это уменьшение энергии, если пренебречь силами трения о воздух, вызвано работой против сил трения качения. За один полный период колебаний маятника работа может быть записана так:

$$\Delta A = k_1 P (\alpha_0 + \alpha_{1/2} + \alpha_{1/2} + \alpha_1), \quad (10)$$

где  $k_1$  — коэффициент трения качения,  $\alpha_{1/2}$  — угол отклонения после одного полупериода. Произведение  $k_1 P$  представляет момент силы трения качения.

Исключим из этого уравнения угол  $\alpha_{1/2}$ . Пусть  $\Delta\alpha$  — уменьшение угла отклонения за один полупериод.

Пользуясь этим, можем написать

$$\alpha_{1/2} = \alpha_0 - \Delta\alpha, \quad \alpha_1 = \alpha_{1/2} - \Delta\alpha. \quad (11)$$

Из уравнения (10) и (11) получим

$$\Delta A = 2k_1 P (\alpha_0 + \alpha_1). \quad (12)$$

Приравнявая уравнения (9) и (12) одно к другому, получим

$$k_1 = \frac{1}{4} l (\alpha_0 - \alpha_1). \quad (13)$$

Для  $n$  полных периодов колебаний имеем:

$$k_1 = \frac{1}{4} \frac{l}{n} (\alpha_0 - \alpha_n). \quad (14)$$

Пользуясь уравнением (5), окончательно получим

$$k_1 = \frac{1}{4} \frac{l}{n} \frac{S_0 - S_n}{L + R}. \quad (15)$$

Этой формулой и пользуются для вычисления величины коэффициента трения качения.

**Измерения.** Для вычисления коэффициента трения качения по формуле (5) необходимо измерить:

- 1) начальное отклонение маятника  $S_0$ ;
- 2) его отклонение  $S_n$  после  $n$  полных периодов его колебаний;
- 3) число  $n$  этих периодов.

Величины  $l$ ,  $L$  и  $R$  даются на установке.

Удобно заранее установить разность  $S_0 - S_n$ , задав начальное и конечное (после  $n$  полных периодов колебаний) отклонения по шкале. В этом случае все измерения сводятся только к отсчету числа  $n$  полных периодов колебаний маятника.

В применяемой установке начальное отклонение взято в 2,5 см, конечное — в 1,0 см.

В этом интервале отклонений маятника при  $S_0 - S_n = 1,5$  см и отсчитывается число  $n$  его полных периодов колебаний.

Отсчет производится не менее пяти раз. Пользуясь средним арифметическим значением этой величины, по формуле (15) вычисляют коэффициент трения качения. Цилиндр на плите должен занимать положение, не препятствующее его перекачиванию. Шкала может несколько перемещаться в горизонтальном направлении. Это позволяет совместить нуль шкалы с концом стрелки покоящегося маятника.

Отклонение маятника производится вручную до упора, который может передвигаться в требуемое положение. Это позволяет каждый раз отклонять установленный маятник на нужное деление шкалы. Отклонение маятника и необходимо производить очень

осторожно. Перекачивание цилиндра при отклонении маятника не должно сопровождаться его проскальзыванием по плите.

После определения коэффициента трения качения для пары сталь—материал пластины их определяют и для других пар материалов. Для этого под цилиндр подкладывают пластинки различных указанных на установке материалов. Поверхность пластинок обрабатывалась на обычном станке и не шлифовалась. Профиль шероховатости поэтому не одинаков в разных направлениях. Естественно, что при перекачивании цилиндра вдоль по длине пластины и поперек ее будут получать несколько различные значения величины коэффициента трения качения. Не следует поэтому изменять положение пластинок при повторных измерениях. Полученные значения коэффициентов трения качения для разных пар сравниваются между собой.

*Литература:* [1] — § 34, 36; [2] — § 17; [3] — § 69, 135—137; [4] — § 72—75, 123—126.

### *Лабораторная работа 16*

#### **Собственные линейные и нелинейные колебания, измерение коэффициентов трения**

**Принадлежности:** 1) установка, 2) секундомер.

**Теория. 1. Линейные колебания.** Движение маятника с трением, пропорциональным величине скорости. Рассмотрим колебания шарика, подвешенного на тонкой невесомой нити и совершающего движение в вертикальной плоскости. Движение шарика можно представить как совокупность двух движений: поступательного движения и вращения вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс. Обозначим угол отклонения нити от вертикали через  $\beta$ , а угол, который образует с вертикалью прямая  $OP$ , проходящая через центр шара  $O$  и точку крепления нити  $P$  (рис. 10.8), через  $\psi$ . Введем декартову систему координат. Начало координат выберем в точке, совпадающей с центром шара в положении равновесия. Ось  $OZ$  направим вертикально вниз, ось  $OX$  — в плоскости колебаний, ось  $OY$  выберем перпендикулярно плоскости колебания. Пусть длина нити равна  $l$ , а радиус шарика —  $r$ . При этом для координат центра шара получим

$$x = l \sin \beta + r \sin \psi, \quad (1)$$

$$z = l (1 - \cos \beta) + r (1 - \cos \psi). \quad (2)$$

Уравнения движения для центра масс имеют вид

$$m\ddot{x} = -T \sin \beta, \quad (3)$$

$$m\ddot{z} = mg - T \cos \beta, \quad (4)$$

где  $T$  — натяжение нити.



Учитывая, что момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр, равен  $\frac{2}{5}mr^2$ , получим уравнение моментов в виде

$$\frac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi} = -Tr \sin(\psi - \beta). \quad (5)$$

Из уравнения (5) видно, что при движении шарика углы  $\psi$  и  $\beta$  не могут тождественно совпадать, так как иначе не возникло бы угловое ускорение. Этим обстоятельством движение шарика, подвешенного на тонкой нити, отличается от движения шарика, закрепленного в виде маятника на тонкой упругой спице.

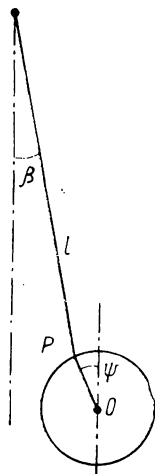


Рис. 10.8

В случае малых углов  $\sin \beta$  и  $\sin \psi$  можно заменить углами и в уравнениях (3) и (5) натяжение  $T$  заменить силой  $mg$ . При этом получим уравнения

$$l\ddot{\beta} + r\ddot{\psi} = -g\beta, \quad (6)$$

$$\frac{2}{5}r\ddot{\psi} = -g(\psi - \beta). \quad (7)$$

Рассматриваемая колебательная система при фиксированной плоскости колебаний является системой с двумя степенями свободы. Частные случаи, в которых обе переменные изменяются с одинаковой частотой, называются нормальными колебаниями (или нормальными модами). Мы ограничимся рассмотрением частных случаев, для которых в начальный момент  $\dot{\beta}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$ . В этом случае нормальные колебания можно искать в виде

$$\beta = \beta_N \cos \omega_N t, \quad (8)$$

$$\psi = \psi_N \cos \omega_N t. \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в уравнения (6) и (7) (после сокращения на множитель  $\cos \omega_N t$ ), получим систему уравнений

$$(l\omega_N^2 - g)\beta_N + r\omega_N^2\psi_N = 0, \quad (10)$$

$$g\beta_N + \left(\frac{2}{5} r\omega_N^2 - g\right)\psi_N = 0. \quad (11)$$

Эта система однородных уравнений имеет отличные от нуля решения для  $\beta_N$ ,  $\psi_N$  лишь при условии, что детерминант системы равен нулю, т. е.

$$(l\omega_N^2 - g)\left(\frac{2}{5} r\omega_N^2 - g\right) - rg\omega_N^2 = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) является уравнением для определения нормальных частот  $\omega_N$ . Обозначим корни  $\omega_N^2$  этого уравнения через  $\omega_1^2$  и  $\omega_2^2$ . С учетом малости  $r/l$   $\omega_1^2$  и  $\omega_2^2$  можно представить в виде

$$\omega_1^2 = \frac{l_0 g}{l_0^2 + \frac{2}{5} r^2} \quad (l_0 = l + r), \quad (13)$$

$$\omega_2^2 = \frac{5}{2} g \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{l} \right). \quad (14)$$

(Для получения (13) необходимо квадратный корень, возникающий в точном выражении для  $\omega_N^2$ , разложить как бином Ньютона с учетом первых четырех членов.)

Заметим, что частота  $\omega_1$  совпадает с частотой маятника, который получится, если нить заменить тонким невесомым стержнем с горизонтальной осью, проходящей через точку подвеса.

В общем случае колебательный процесс является суперпозицией обеих нормальных мод. Однако специальным подбором начальных отклонений можно возбудить лишь одну моду. Например, для определения начальных условий, соответствующих возбуждению одной «жесткой» моды с частотой  $\omega_N = \omega_2$ , нужно подставить это значение  $\omega_N$  в любое из уравнений системы (10), (11), при этом получим

$$\beta_N = -\frac{r}{l}\psi_N. \quad (15)$$

Из (15) видно, что при таком колебании центр шара не смещается в направлении оси  $Ox$ . Эти колебания можно легко наблюдать, если повернуть шар вокруг оси, проходящей через его центр (стараясь не сместить центр в направлении оси  $Ox$ ), и отпустить (рис. 10.9).

Соответствующим подбором начальных отклонений можно возбудить лишь одну «мягкую» моду с частотой  $\omega_1$ . Для этого под-

ставим  $\omega_1$  в уравнение (12). При этом получим (с учетом лишь членов порядка  $r/l$ )

$$\beta_0 = \left(1 - \frac{2}{5} \frac{r}{l}\right) \psi_0. \quad (16)$$

Без специальных приспособлений создать начальные отклонения, удовлетворяющие условию (16), весьма затруднительно, так как это требует высокой точности фиксирования углов  $\psi_0$  и  $\beta_0$ .



Рис. 10.9

При начальном условии  $\beta_0 = \psi_0$  возбуждаются обе моды, но амплитуда высокочастотной моды при этом в силу условия  $r \ll l$  мала. Кроме того, высокочастотная мода затухает быстрее низкочастотной. Поэтому спустя некоторое время можно считать, что в системе возбуждена лишь низкочастотная мода колебаний. При этом в качестве начала процесса можно взять момент времени, когда  $\dot{\beta} = 0$ . Новые начальные условия будут удовлетворять уравнению (16), которое можно рассматривать как соотношение между амплитудами  $\beta_N$ ,  $\psi_N$  в уравнениях (8), (9). Если пренебречь величинами порядка  $(r/l)^2$ , то уравнение (6) можно заменить уравнением

$$(l+r)\ddot{\beta} = -g\beta, \quad (17)$$

которое запишем в виде

$$\ddot{\beta} + \omega_0^2 \beta = 0, \quad (18)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l+r} = \frac{g}{l_0}. \quad (19)$$

Если вместо угла  $\beta$  измерять координату  $x$  центра шара, то уравнение для  $x$  будет иметь вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (20)$$

В уравнении (20) не учтены процессы, приводящие к затуханию колебаний. Это прежде всего сопротивление воздуха движению шара, остаточные деформации нити, явления, происходящие в точках крепления нити, и, возможно, другие. Рассмотрим столь идеальную систему, что главной причиной, приводящей к затуханию низкочастотных колебаний, является трение шарика о воздух. При достаточно малых скоростях сила трения шарика о воздух пропорциональна скорости

$$\dot{f} = -Bv. \quad (21)$$

Вместо коэффициента трения  $B$  для дальнейшего рассмотрения характера колебания шарика удобнее ввести декремент затухания  $\delta = B/(2m)$ . При этом уравнение колебания с учетом силы трения вместо (20) примет вид

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (22)$$

Решение уравнения (22) для начальных условий  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v(0) = 0$  имеет вид

$$x(t) = \frac{x_0}{\cos \sigma} e^{-\delta t} \cos(\omega' t - \sigma), \quad (23)$$

где

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \cos \sigma = \frac{\omega'}{\omega_0}, \quad \sin \sigma = \frac{\delta}{\omega_0}. \quad (24)$$

Амплитудные значения отклонений достигаются в моменты  $t_n = nT'/2$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $T' = 2\pi/\omega'$  — период затухающих колебаний. При этом амплитуды убывают по экспоненциальному закону

$$a_n = e^{-\delta t_n} a_0 \quad (a_0 = x_0). \quad (25)$$

В качестве начальной амплитуды  $a_0$  в (25) может быть взята любая амплитуда, возникающая в процессе колебания, при этом время  $t_n$  должно отмеряться от момента, к которому относится эта амплитуда.

Таким образом, зная два значения амплитуды  $a_0$  и  $a_n$  и время  $t_n$ , за которое произошло изменение амплитуды от значения  $a_0$  до значения  $a_n$ , можно определить декремент затухания по формуле

$$\delta = \frac{1}{t_n} \ln \frac{a_0}{a_n}. \quad (26)$$

При слабом затухании амплитуда за один период изменяется незначительно. При этом значения амплитуд, относящиеся к двум

моментам времени, можно задать заранее в виде удобных для наблюдения отклонений в одном определенном направлении. При этом разница между заданным значением амплитуды и фактическим значением амплитуды в соответствующий момент времени будет также незначительной, т. е. может быть существенно меньше ошибки, связанной с определением амплитуды.

Наряду с декрементом затухания вводят в рассмотрение логарифмический декремент затухания, равный логарифму отношения двух последовательных (через период) амплитуд. При этом логарифмический декремент затухания  $\Phi$  равен

$$\Phi = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{a_0}{a_n} \right). \quad (26 A)$$

**2. Нелинейные колебания. Движение маятника с трением, постоянным по модулю (трение качения).** Рассмотрим движение шарика, подвешенного на нити и опирающегося на наклонную плоскость. Нить параллельна наклонной плоскости (рис. 10.10). При

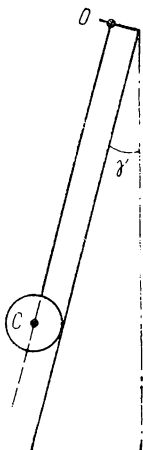


Рис. 10.10

отклонении шарика (при натянутой нити) от положения равновесия на угол  $\beta$ , который образует нить при этом отклонении с направлением нити в положении равновесия, шарик, если его не удерживать в отклоненном положении, начнет ускоренно двигаться к положению равновесия и, пройдя положение равновесия, отклонится на угол  $\beta_1$  ( $\beta_1 \leq \beta$ ) в противоположном направлении. Таким образом, возникает затухающий колебательный процесс. Если между шариком и наклонной плоскостью возникает сила трения, то при достаточном значении этой силы шарик в процессе колебания будет перекатываться без проскальзывания, а указанная сила трения будет являться силой трения покоя. Если кроме этой силы будет возникать сила трения качения, то амплитуда в

процессе колебания будет уменьшаться. Рассмотрим уравнения движения шарика в приближении  $\psi = \beta$ . Если наклон плоскости составляет угол  $\gamma$  с вертикалью, то уравнение движения для центра масс шарика будет иметь вид

$$ml_0\ddot{\beta} = -mg \cos \gamma \beta + F_{\text{тр}}. \quad (27)$$

Направление силы трения покоя  $F_{\text{тр}}$  определяется так, чтобы она была направлена против того движения, которое возникло бы при отсутствии этой силы трения.

Сила  $F_{\text{тр}}$  создает момент относительно оси  $OC$ , проходящей через центр масс  $C$  и являющейся как бы продолжением нити. Сила трения качения тоже создает момент сил относительно оси  $OC$ . Обозначим этот момент сил через  $M_{\text{тк}}$ . Момент  $M_{\text{тк}}$  всегда направлен таким образом, что он замедляет вращение. Момент, вызванный закручиванием нити, учитывать не будем, полагая его малым. Аналогичным образом не будем учитывать влияние воздуха на движение шарика, так как возникающая в данном случае сила трения качения оказывает более заметное воздействие.

Поворот шарика относительно оси  $OC$  будем описывать углом  $\varphi$ . Соответствующее уравнение движения будет иметь вид

$$J_0\ddot{\varphi} = -F_{\text{тр}}r + M_{\text{тк}}, \quad (28)$$

где  $J_0 = 2/5 mr^2$  — момент инерции шарика относительно оси  $OC$ .

Предположение об отсутствии проскальзывания приводит к кинематическим соотношениям

$$l_0\dot{\beta} = r\dot{\varphi}, \quad l_0\ddot{\beta} = r\ddot{\varphi}, \quad (29)$$

так как точка касания шарика с плоскостью в этом случае является мгновенной осью. (Кривизной траектории, которую описывает при движении центр масс шарика, мы при этом пренебрегаем, а следовательно, пренебрегаем и вращением шарика относительно оси, перпендикулярной касательной плоскости.)

Силу  $F_{\text{тр}}$  из уравнения (27) можно выразить через  $\ddot{\beta}$  и  $\beta$ , а  $\ddot{\beta}$  и  $\beta$  с помощью (29) — через  $\ddot{\varphi}$  и  $\varphi$ . Уравнение (28) при этом примет вид уравнения моментов относительно мгновенной оси

$$J\ddot{\varphi} = -\frac{r^2}{l_0} mg \cos \gamma \varphi + M_{\text{тк}}, \quad (30)$$

где  $J = J_0 + mr^2$  — момент инерции шарика относительно мгновенной оси.

Момент силы трения качения пропорционален силе нормально-го давления и не зависит от скорости, т. е.

$$M_{\text{тк}} = \pm k_1 mg \sin \gamma \quad (31)$$

( $k_1$  имеет размерность длины).

Вместо угла поворота шарика  $\varphi$  удобнее ввести в рассмотрение смещение центра масс  $x$ . При малых углах  $\beta$   $x = r\varphi$ . Если в на-

чальный момент времени  $v(0) = \dot{x}(0) = 0$ , то при  $x(0) = x_0 > 0$  движение начнется в сторону отрицательных  $x$ , т. е. на протяжении первого полупериода  $v(t) \leq 0$ , такой же знак будет иметь и угловая скорость  $\varphi(t)$ . При этом из условия замедляющего действия момента  $M_{\text{тк}}$  в (31) должен быть выбран знак «+». При обратном движении ( $v > 0$ ) нужно выбирать в (31) знак «—», т. е. знак в (31) выбирается таким, какой имеет амплитудное отклонение  $x(t_0)$  ( $v(t_0) = 0$ ) в начале полупериода.

Вводя

$$\Delta\varphi = \frac{kl_0}{r^2} \operatorname{tg} \gamma, \quad (32)$$

с учетом (31) уравнение (30) можно представить в виде

$$J\ddot{\varphi} + \frac{r^2}{l_0} mg \cos \gamma (\varphi \mp \Delta\varphi) = 0, \quad (33)$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 (\varphi \mp \Delta\varphi) = 0, \quad (34)$$

где циклическая частота  $\omega$  равна

$$\omega = \sqrt{\frac{r^2 mg \cos \gamma}{Jl_0}} = \sqrt{\frac{5 \cos \gamma g}{7l_0}}. \quad (35)$$

Если вместо  $\varphi$  ввести координату центра масс шарика  $x = r\varphi$  и вместо  $\Delta\varphi$  ввести  $\Delta x = r\Delta\varphi$ , то уравнение (34) запишется в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 (x \mp \Delta x) = 0. \quad (36)$$

Уравнение (35) описывает нелинейные колебания, так как при смене направления движения меняется знак перед  $\Delta x$ .

Рассмотрим характер этих колебаний. Положим в момент  $t=0$   $v(0)=0$  и  $x(0)=a_0>0$ . Положительному значению  $x(0)$  соответствуют знак «+» в (32) и, следовательно, знак «—» в уравнении (36). Если  $a_0 > \Delta x$ , то возникает момент сил, создающий движение к положению равновесия. При  $a_0 < \Delta x$  такого движения не возникает. Маятник, предоставленный сам себе, остается в отклоненном положении, т. е. имеется так называемая зона застоя. При этом момент сил трения определяется не законом (31), а условием обращения в нуль правой части уравнения (30). Рассмотрим случай  $a_0 > 2\Delta x$ . Введем величину  $S = x - \Delta x$ . Уравнение для  $S(t)$  имеет вид

$$\ddot{S} + \omega^2 S = 0. \quad (37)$$

Решение уравнения (37) с учетом начальных условий  $\dot{S}(0) = \dot{v}(0) = 0$ ,  $S(0) = a_0 - \Delta x \equiv S_0 > \Delta x$  имеет вид

$$S = S_0 \cos \omega t. \quad (38)$$

Через полпериода, когда скорость вновь обратится в нуль,  $S(T/2) = -S_0$ . При этом для отклонения  $x(T/2)$  получим

$$x(T/2) = S(T/2) + \Delta x = -(a_0 - 2\Delta x), \quad (39)$$

т. е. за полпериода амплитуда уменьшится на  $2\Delta x$ . Если новая амплитуда  $a_1 = |x(T/2)| > 2\Delta x$ , то при обратном движении за следующую половину периода амплитуда опять уменьшится на  $2\Delta x$ . При обратном движении в уравнении (36) следует взять знак «+» и ввести  $S(t) = x + \Delta x$  ( $x(T/2) < 0$ ). Таким образом, за каждую половину периода амплитуда будет уменьшаться на  $2\Delta x$ . Так будет происходить до тех пор, пока какая-то амплитуда не станет меньше  $2\Delta x$ . Чтобы рассмотреть, что будет происходить в этом случае, положим начальное отклонение  $x(0) = a_0 > 0$ , но  $\Delta x < a_0 < 2\Delta x$ . В соответствии с (39) при этом получим отклонение  $x$  в момент  $T/2$ , равное

$$x(T/2) = -(a_0 - 2\Delta x) > 0, \quad 0 < x(T/2) < \Delta x, \quad (40)$$

т. е. маятник остановится в зоне застоя в области положительных значений  $x$ .

Таким образом, до тех пор, пока амплитуды будут больше  $4\Delta x$ , за каждый период они будут уменьшаться на  $4\Delta x$ . Зная уменьшение амплитуды за  $n$  полных периодов, можно определить

$$\Delta x = \frac{a_0 - a_n}{4n}. \quad (41)$$

С другой стороны, из (32) и соотношения  $\Delta x = r \Delta \varphi$  следует, что

$$k_1 = \frac{\Delta x r}{l_0} \operatorname{ctg} \gamma. \quad (42)$$

Из (41) и (40) получим

$$k_1 = \frac{r}{l_0} \operatorname{ctg} \gamma \frac{a_0 - a_n}{4n}. \quad (43)$$

**Упражнение I. Описание установки.** На массивном основании (рис. 10.11) с тремя установочными винтами может вращаться вокруг горизонтальной оси  $AB$  стержень  $CD$  с плоскостью  $E$ . На плоскости  $E$  укреплен подвижная шкала с вертикальным отсчетом и паз, в который закладывается стеклянная пластинка или полоска мягкой резины. Винтом с правой стороны можно закреплять стержень с плоскостью под некоторым углом  $\gamma$  к вертикали. Величина этого угла измеряется по отвесу, который укреплен под плоскостью. Маятник — стальной шарик на тонкой нити — подвешивается на муфточке, закрепленной на конце стержня.

Для получения линейных колебаний  $\sin \beta \approx \beta$  стержень необходимо отклонить к себе до упора. Это позволит маятнику совершать колебания в вертикальной плоскости.

Для получения нелинейных колебаний стержень с плоскостью отклоняют от себя под углом  $\gamma > 0$ . Шарик маятника будет при



этом перекачиваться по поверхности стекла или резины. При увеличении угла  $\gamma$  возрастает величина давления шарика на поверхность, по которой он перекачивается. Это усиливает деформацию материала, а следовательно, и величину коэффициента трения качения. Последнее практически неощутимо для стекла, но заметно для резины.

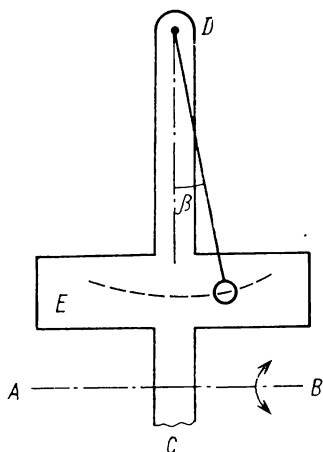


Рис. 10.11

Начальное отклонение шарика осуществляется спускным механизмом. Поворотом рычага-лопатки шарик смещается в исходное положение, быстрым поворотом лопатки в обратную сторону он освобождается и начинает движение. Радиус шарика, его масса, длина нити указаны на установке.

**Измерения при линейных колебаниях.** Последовательность проведения эксперимента следующая. Лопатку для отклонения шарика помещают с левой стороны, зеркало (шкалу) — в среднее положение. Освобождают горизонтальную ось вращения стержня — освобождают винт, имеющийся справа. Стержень вращают (его верхний конец на себя) до упора. Пользуясь винтами (передним и задним), придают нити маятника симметричное положение относительно продольной оси стержня. Шарик маятника должен занимать среднее положение в области, в которой он будет двигаться. Затем закрепляют горизонтальную ось стержня — зажимают винт справа. При покоящемся маятнике совмещают нуль шкалы с нитью при обязательном совпадении нити с ее изображением в зеркале. Изменять положение винтов и зеркала после этого не следует.

Для определения периода  $T$  вращением лопатки вправо отклоняют шарик на 1,0 см (при полностью неподвижном шарике на лопатке). Отклоняют лопатку влево, пускают в ход секундомер. Отсчитав сто полных периодов колебаний маятника, секундомер

останавливают. Вычисляют среднее значение величины периода колебаний.

Для определения  $\delta$  удобно заранее установить величины  $a_0$  и  $a_n$  и измерить только время  $t$ , за которое уменьшается в принятых пределах амплитуда колебаний. Для вычисления декремента затухания примем, что  $a_0=1,5$  см,  $a_n=0,5$  см. При этом шарик отклоняется на 1,5 см. Маятник освобождается, пускается в ход секундомер. Следя за колебаниями маятника, секундомер останавливают в тот момент, когда амплитуда колебания достигает величины, равной 0,5 см.

Это позволяет с помощью (26) вычислить значение декремента затухания  $\delta$ .

Зная период  $T$ , по формуле (26 А) вычисляют логарифмический декремент затухания и по формуле  $b=2m\delta$  вычисляют коэффициент трения шарика о воздух.

Для проверки предположения (21) следует провести аналогичные измерения декремента затухания  $\delta$  при больших значениях амплитуд, например  $a_0=2$  см,  $a_n=1$  см.

Если в начале запуска системы наблюдаются высокочастотные колебания в виде дрожания шарика, то следует возбуждать колебания с амплитудой несколько большей, чем выбранная для расчета. При этом секундомер следует запускать в тот момент, когда амплитуда станет равной заданной для расчета. К этому моменту времени высокочастотные колебания должны полностью затухнуть. Однако такой способ дает некоторую ошибку в определении начального момента времени.

**Измерения при нелинейных колебаниях.** В паз плоскости вкладывается стеклянная пластинка. Отпускают фиксирующий винт, находящийся с правой стороны установки. Стержень поворачивают (верхний конец от себя) так, чтобы угол  $\gamma$  наклона его оси к вертикали был равен  $10^\circ$ . Винт закрепляют, а шарик маятника накладывают на стекло. В покоем положении шарика нить маятника должна быть параллельна оси стержня. Смещают шкалу так, чтобы нить маятника совпадала с ее нулем по зеркальному отсчету. Отклоненный из своего положения равновесия шарик будет перекатываться по стеклу. Его отклонение и освобождение производится, как и прежде, спусковым механизмом.

При заметном затухании заранее можно задать лишь  $a_0$ , например  $a_0=1,5$  см, вторую амплитуду можно задать лишь приближенно, например  $a_n \simeq 0,5$  см, уточнив это значение в процессе эксперимента, так как амплитуда для соответствующего числа колебаний будет либо несколько больше, либо несколько меньше заданного значения. При небольшом числе колебаний их можно считать непосредственно. При слабом затухании вместо числа  $n$  можно определить соответствующее время  $t_n$  и период колебаний  $T$ , определив  $a_0$ ,  $a_n$  и  $n$ , по формуле (43) находят коэффициент  $k_1$ , определяющий момент силы трения качения согласно закону (31). Необходимо провести не менее трех измерений, повторяя или не-

сколько варьируя  $a_0$ ,  $a_n$  или  $n$  (если  $a_n$  определяется, а не задается).

**Упражнение II. Наклонный маятник.** В данной работе изучаются собственные затухающие колебания маятника, определяются соответствующие коэффициенты сил трения (коэффициент  $b$  вязкого трения и коэффициент  $k_1$  трения качения шарика по металлической пластине).

**Описание установки.** Она состоит непосредственно из наклонного маятника (наклон можно изменять, вращая ручку поворотного механизма), шарик которого в процессе колебаний катается по металлической пластине, и электронного блока, в состав которого входят таймер и фотоэлектрическая система регистрации числа периодов колебаний маятника. Включение электронного блока осуществляется нажатием клавиши «сеть». При нажатии на клавишу «сброс» происходит «обнуление» табло электронного блока, а затем при первом же пересечении маятником светового пучка фотоэлектрического датчика включаются таймер и система счета числа полных периодов колебаний. После нажатия на клавишу «стоп» очередное пересечение маятником светового пучка, соответствующее завершению текущего периода колебаний, останавливает работу таймера и системы счета периода колебаний; результаты высвечиваются на табло электронного блока. Для повторения измерений необходимо нажать клавишу «сброс».

**Измерения.** На первом этапе проводят измерения декремента затухания  $\delta$ , логарифмического декремента  $\Phi$  и коэффициента вязкого трения  $b$  в вертикальном положении системы подвеса маятника (режим линейных колебаний). Для этого с помощью систем электронного блока измеряют время  $t$  и число  $n$  периодов колебаний, в течение которых угловая амплитуда колебаний уменьшается от величины  $\beta_0$  до  $\beta_n$ , например, уменьшается в 2 раза. Затем измеряют средний период колебаний (за  $50 \div 100$  колебаний) и вычисляют декремент затухания  $\delta$ , логарифмический декремент  $\Phi$  и коэффициент вязкого трения  $b$  по формулам

$$\delta = \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\beta_0}{\beta_n} \right),$$

$$\Phi = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\beta_0}{\beta_n} \right),$$

$$b = 2m\delta,$$

где  $m$  — масса шарика и стерженька, на который одевается шар для крепления к нити подвеса (массы шаров и стерженька известны); а также вычисляют ошибки полученных величин  $\delta$ ,  $\Phi$  и  $b$ .

На втором этапе измерений маятник переводят в наклонное положение (угол наклона маятника  $\gamma$  определяют по специальной шкале поворотного механизма) и переходят к изучению собственных колебаний маятника при наличии нелинейной силы (точнее, момента силы) трения качения шарика по металлической пластине. При этом необходимо обращать внимание на правильный вы-

бор амплитуды колебаний маятника для выбранного угла наклона  $\gamma$ : шарик должен кататься по пластине без проскальзывания (в первую очередь это относится к наивысшим точкам траектории маятника).

Далее с помощью систем электронного блока измеряют время  $t$  и число  $n$  полных периодов колебаний маятника, в течение которых его угловая амплитуда колебаний уменьшается от  $\beta_0$  до  $\beta_n$  (линейная амплитуда от  $a_0 = \beta_0 l_0$  до  $a_n = \beta_n l_0$ ), с помощью линейки измеряют длину маятника  $l_0$ , с помощью штангенциркуля или микрометра измеряют диаметр шарика, определяют радиус  $r$ , а затем вычисляют величину коэффициента трения качения по формуле

$$k_1 = \frac{a_0 - a_n}{4nl_0} r \operatorname{ctg} \gamma$$

и ошибку полученной величины  $k_1$ . Кроме того, необходимо произвести сопоставление экспериментально полученного значения периода колебаний

$$T = \frac{t}{n}$$

с величиной периода колебаний, который дают линейные уравнения, справедливые для участков движения маятника с положительной и отрицательной скоростями:

$$T_0 = \frac{2\pi}{r} \sqrt{\frac{Jl_0}{mg \cos \gamma}} = 2\pi \sqrt{\frac{7l_0}{5g \cos \gamma}}.$$

Здесь  $m$  — масса шарика и стерженька, на который одевается шар для крепления к нити подвеса (массы шаров и стерженька известны),  $J$  — момент инерции шарика относительно мгновенной оси вращения.

Измерения проводят для шарика и пластины из стали, латуни, дюралюминия (или по указанию преподавателя для комбинации этих материалов). Для каждого материала рекомендуется повторять измерения при двух различных углах  $\gamma$  наклона маятника.

*Литература:* [1] — § 34, 36; [2] — § 17; [3] — § 69, 135—137; [4] — § 72—75, 123—126.

**Введение.** При изменении сил, действующих на тело, изменяется его форма, т. е. происходит деформация тела. Во многих случаях при изучении движения тел необходимо знать законы, связывающие действующие силы с теми деформациями, которые они вызывают. Силы, возникающие между различными частями деформируемого тела, называются внутренними силами или усилиями.

Проводя анализ деформаций, следует учитывать, что нельзя переносить силу по линии ее действия, как можно было бы сделать в абсолютно твердом теле. Это легко продемонстрировать на примере системы тел, состоящей из последовательности масс, связанных пружинками (рис. 11.1). Деформации этой системы, очевид-

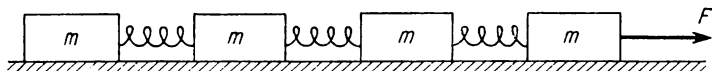


Рис. 11.1

но, будут различными в зависимости от того, к какому телу приложена сила.

В общем случае законы, связывающие силы и деформации, сложны, эти связи могут быть неоднозначными и зависеть от величины и характера приложенных сил и других причин. Однако в практически наиболее важных случаях, когда деформации являются малыми, а сами тела упругими, силы однозначно определяют деформации и наоборот.

Несмотря на громадное разнообразие возможных деформаций, все они могут быть сведены к двум элементарным — однородному растяжению (сжатию) и сдвигу. При анализе деформаций кроме элементарных видов принято выделять также и сложные виды деформаций — кручения и изгиба. Рассмотрим наиболее характерные типы деформаций более подробно.

**Деформации растяжения и сжатия.** Деформацией растяжения или сжатия называется деформация, связанная с относительным удлинением или укорочением деформируемого участка. Проанализируем мысленно опыт с растяжением упругого стержня (рис. 11.2). Если материал стержня однороден, то все одинаковые ку-

сочки стержня будут растянуты одинаково при воздействии на стержень некоторой однородной нагрузки. Такую деформацию можно охарактеризовать относительным удлинением  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (11.1)$$

где  $\Delta l$  — удлинение отрезка стержня, имевшего первоначальную длину  $l$ . Для любого участка упругого стержня величина  $\epsilon$  одинакова и зависит от величины растягивающей силы  $F$ . Под воздей-

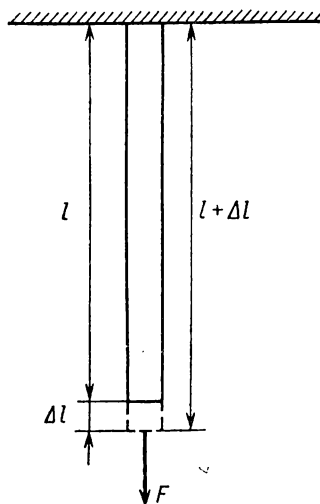


Рис. 11.2

ствием этой силы в стержне возникают внутренние силы взаимодействия между различными участками стержня. Из условий равновесия каждого отдельного участка следует, что сумма сил, действующих на него, равна нулю, т. е. в любом поперечном сечении стержня возникают усилия, равные  $F$ . Величину усилия, действующего на единицу площади поперечного сечения, называют напряжением и обозначают его  $\sigma$ . Напряжение, возникающее в растягиваемом стержне, равно

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad (11.2)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения стержня.

Будем постепенно увеличивать растягивающую силу  $F$ . При небольших усилиях напряжение  $\sigma$  и относительное удлинение  $\epsilon$  приблизительно пропорциональны друг другу. При больших значениях  $\sigma$  связь становится нелинейной. При уменьшении нагрузки до нуля тело может возвратиться в прежнее состояние. Область

малых деформаций и напряжений, при которых отсутствуют остаточные деформации и связь между  $\sigma$  и  $\epsilon$  является однозначной, называется областью упругих деформаций, а максимальное для этой области значение  $\sigma_y$  называется пределом упругости. При дальнейшем увеличении напряжения деформации ведут к необратимым изменениям в теле. Еще большее увеличение напряжения приводит к неоднозначной связи между  $\sigma$  и  $\epsilon$  — эта область называется областью текучести.

Область деформаций, при которых выполняется соотношение

$$\sigma = E \cdot \epsilon, \quad (11.3)$$

называется областью пропорциональности, а соотношение (11.3) называется законом Гука. Постоянный коэффициент  $E$  имеет размерность Н/м<sup>2</sup> или Н/мм<sup>2</sup> и называется модулем Юнга. Максимальное значение  $\sigma_n$ , при котором выполняется соотношение (11.3), называется пределом пропорциональности. Для стали предел пропорциональности лежит близко к пределу упругости, но вообще они могут и не совпадать.

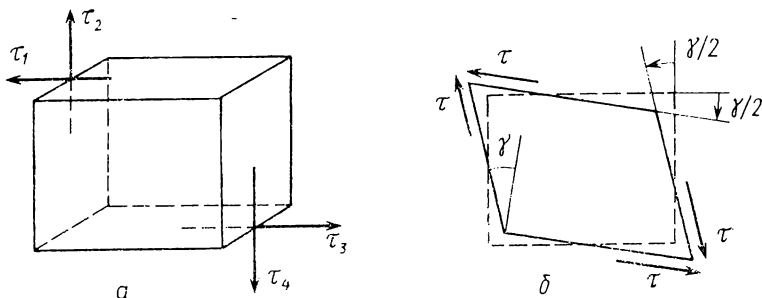


Рис. 11.3

**Деформация сдвига.** Рассмотрим деформацию кубика, вырезанного из однородного изотропного вещества, под действием распределенных касательных сил, приложенных к его противоположным граням. Для соблюдения условий равновесия необходимо равенство всех напряжений, приложенных к граням кубика (рис. 11.3, а).

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4, \quad (11.4)$$

здесь  $\tau_i$  — напряжение, определяемое, как отношение силы, действующей на соответствующую грань, к площади этой грани. Действительно, для отсутствия поступательного движения кубика как целого необходимо выполнение соотношений

$$\tau_1 = \tau_3, \quad \tau_2 = \tau_4,$$

а для отсутствия вращательного движения требуется, чтобы

$$\tau_1 = \tau_4, \quad \tau_2 = \tau_3,$$

откуда и следует равенство (11.4).

При изменении напряжений  $\tau_1 \div \tau_4$  будут меняться только углы между гранями кубика (объем при этом остается постоянным), (см. рис. 11.3, б). Пусть под действием этих напряжений углы между соответствующими гранями изменятся на малый угол  $\gamma$ . Опыт показывает, что для многих материалов существует область пропорциональности, где выполняется линейная связь между  $\gamma$  и  $\tau$

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (11.5)$$

коэффициент  $G$  называется модулем сдвига.

Размерность модулей  $E$  и  $G$  одна и та же. Действительно, размерность модуля упругости

$$[E] = \left[ \frac{P \cdot L}{S \cdot \Delta L} \right] = \frac{[P]}{[S]},$$

а размерность модуля сдвига

$$[G] = \left[ \frac{P}{S \cdot \gamma} \right] = \frac{[P]}{[S]}.$$

**Деформация кручения.** Примером деформации кручения является закручивание однородного круглого стержня, когда одно основание стержня поворачивается вокруг оси на некоторый угол  $\omega$

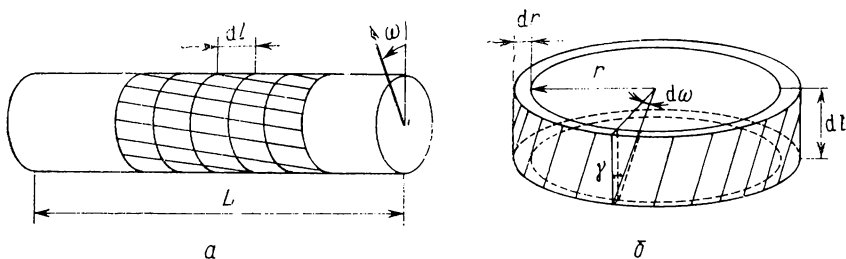


Рис. 11.4

относительно другого основания (рис. 11.4, а). Угол кручения при малых деформациях определяется законом Гука и связан с моментом сил  $M$ , закручивающих стержень

$$M = f \cdot \omega, \quad (11.6)$$

где  $f$  — модуль кручения.

Очевидно, что для каждого малого объема в рассматриваемом случае происходит деформация сдвига. Поэтому кручение не является элементарным видом деформации. Рассмотрим связь между модулем сдвига и модулем кручения.

Если стержень однородный, то для любого выделенного участка стержня длиной  $dl$  основания этого участка повернутся на один и тот же угол относительно друг друга  $d\omega$ . Причем между  $d\omega$  и



углом поворота оснований для всего стержня выполняется соотношение

$$d\omega = dl \cdot \frac{\omega}{l}, \quad (11.7)$$

где  $l$  — длина стержня. Выделим из участка  $dl$  кольцо с радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ . Из рис. 11.4, б видно, что угол кручения  $d\omega$  связан с углом  $\gamma$  для деформации сдвига элементарного объема простым соотношением

$$\gamma \cdot dl = d\omega \cdot r.$$

Здесь учтено, что углы  $\gamma$  и  $d\omega$  малы и  $\sin \gamma \approx \gamma$ ,  $\sin (d\omega) \approx d\omega$ . Касательное усилие на поверхности кольца площадью  $2\pi r dr$  определим, используя соотношение (11.5):

$$\tau (2\pi r \cdot dr) = (2\pi r dr) \cdot G \cdot \gamma = 2\pi r^2 G \frac{d\omega}{dl} dr.$$

Момент этого усилия относительно оси стержня равен

$$dM = 2\pi r^3 G \frac{d\omega}{dl} \cdot dr.$$

Суммарный момент внутренних сил, действующий в произвольном сечении стержня, найдем, интегрируя  $dM$  по радиусу:

$$M = 2\pi G \frac{d\omega}{dl} \int_0^R r^3 dr = \frac{G\pi \cdot R^4}{2} \frac{d\omega}{dl}. \quad (11.8)$$

Этот момент одинаков во всех поперечных сечениях стержня и равен моменту сил, закручивающему стержень. Подставляя (11.7) в (11.8), получаем

$$M = \frac{G\pi R^4}{2} \frac{\omega}{l}.$$

Учитывая (11.6), находим связь между модулем кручения и модулем сдвига

$$f = \frac{G \cdot \pi \cdot R^4}{2l}. \quad (11.9)$$

**Деформация изгиба.** Если прямой упругий стержень неподвижно закрепить одним концом в твердой стенке, а другой конец нагрузить грузом  $P$ , то этот конец опустится, т. е. стержень согнется. Легко понять, что при таком изгибе верхние слои стержня будут растягиваться, нижние — сжиматься, а некоторый средний слой, который называют нейтральным слоем, сохранит длину и только претерпит искривление (рис. 11.5, а).

Перемещение, которое получает свободный конец стержня, называется стрелой прогиба. Стрела прогиба будет тем больше, чем больше нагрузка, и, кроме того, она должна зависеть от формы

стержня, его размеров и модуля упругости. Точный анализ деформаций и напряжений в упругом стержне довольно сложен. Приближенные результаты можно получить, используя гипотезу Бернулли о том, что при изгибе стержня или балки все поперечные сечения остаются плоскими. Это предположение соответствует предположению, что в каждом малом объеме стержня происходит только деформация сжатия или растяжения.

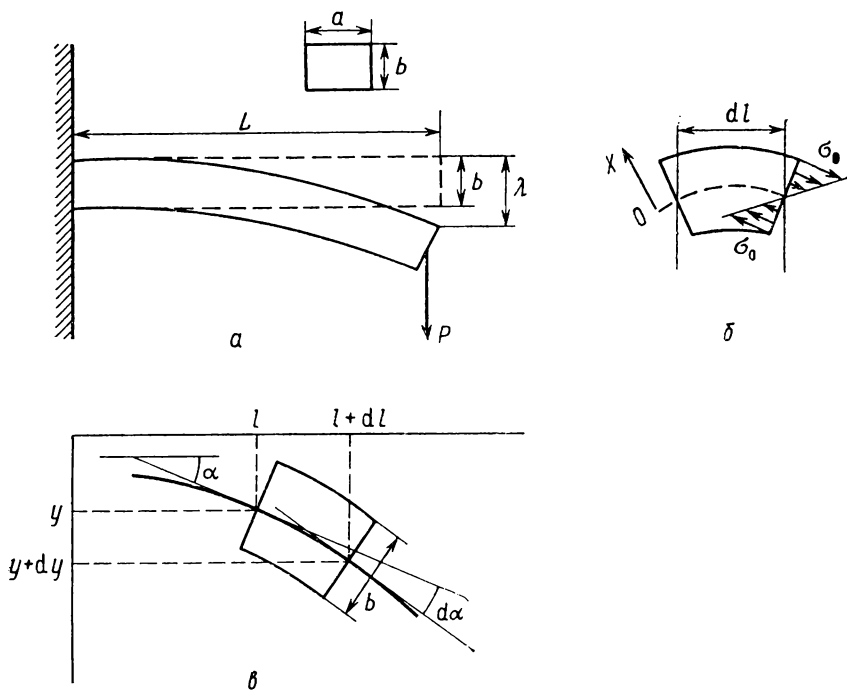


Рис. 11.5

Определим деформации стержня под действием момента силы, приложенной к его концу  $M = P \cdot L$ . Вырежем из этого стержня кусочек малой длины  $dl$  (рис. 11.5, б). При малых деформациях нормальное напряжение в каждом слое выделенного участка пропорционально его удлинению или укорочению и будет линейно изменяться при удалении от нейтрального слоя

$$\sigma = \sigma_0(l) \frac{x}{h}, \quad (11.10)$$

где  $x$  — расстояние от данного слоя до нейтрального,  $\sigma_0(l)$  — напряжение в самом удаленном слое, находящемся на расстоянии  $h$  от нейтрального,  $l$  — координата элемента стержня  $dl$ .

В том случае, когда сечение стержня имеет прямоугольную форму, нейтральный слой расположен посредине стержня и  $h = b/2$ . На каждый слой толщиной  $dl$  и удаленный от нейтрального слоя на расстояние  $x$  действует усилие

$$dF = \sigma a dx = \frac{2\sigma_0(l)a}{b} \cdot x dx.$$

Причем результирующая всех нормальных усилий, действующих на поперечное сечение стержня, в силу условия (11.10) равна нулю, а момент всех этих усилий должен равняться моменту силы  $P$  относительно сечения с координатой  $l$ ,  $M_l = P(L - l)$  (это соответствует выполнению условий равновесия для выделенного объема).

Момент всех нормальных усилий относительно нейтрального слоя находим, интегрируя по всему сечению

$$M_l = \int_{-b/2}^{b/2} x dF(x) = \frac{2\sigma_0(l)a}{b} \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx = \sigma_0(l) \frac{1}{6} ab^2. \quad (11.11)$$

Определим линию прогиба стержня, закрепленного одним концом в стенке, под действием нагрузки  $P$  (рис. 11.5, а). Пусть уравнение искомой линии будет  $y = f(l)$  (рис. 11.5, в). При малой деформации стержня угол между направлением касательной к упругой линии в точке  $l$  равен

$$\alpha = \frac{dy}{dl},$$

а изменение направления касательной при переходе от точки  $l$  к точке  $l + dl$  равно

$$d\alpha = \frac{d}{dl} \left( \frac{dy}{dl} \right) dl = \frac{d^2y}{dl^2} dl.$$

Из рис. 11.5, б и 11.5, в видно, что относительное удлинение слоя, наиболее удаленного от нейтрального, равно

$$\varepsilon(l) = \frac{d\alpha}{dl} \cdot \frac{b}{2}.$$

Используя закон Гука, получаем

$$\sigma_0(l) = E\varepsilon(l) = E \cdot \frac{b}{2} \frac{d^2y}{dl^2}. \quad (11.12)$$

Учитывая найденную связь между  $M_l$  и  $\sigma_0(l)$  (11.11), получаем окончательно уравнение для определения зависимости  $y = f(l)$ .

$$\frac{d^2y}{dl^2} = \frac{12P_1}{ab^3E} (L - l). \quad (11.13)$$

Интегрируя уравнение (11.13) от  $l=0$  до  $l=l'$  и учитывая, что  $(dy/dl)_{l=0}=0$ , получаем

$$\left(\frac{d}{dl}\right)_{l'} = \int_0^{l'} \frac{d^2y}{dl^2} dl = \frac{12P}{ab^3E} \left(Ll' - \frac{1}{2}l'^2\right). \quad (11.14)$$

Интегрируя (11.14) еще раз от 0 до  $L$ , получаем, что стрела прогиба для стержня длины  $L$ , ширины  $a$  и высоты  $b$  выражается формулой

$$\lambda = y(L) = \frac{4PL^3}{ab^3E}. \quad (11.15)$$

В случае, когда стержень обоими концами свободно положен на твердые опоры и нагружен в середине весом  $P$  (рис. 11.6), то стрела прогиба найдется также из уравнения (11.15), но только вместо величины  $P$  нужно будет поставить  $P/2$ , а вместо  $L$  по-

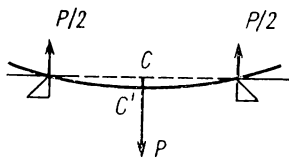


Рис. 11.6

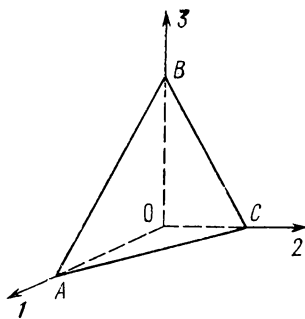


Рис. 11.7

ставить  $L/2$ . Действительно, в этом случае изгиба каждая из опор оказывает на стержень противодействие, равное  $P/2$ , тогда как средняя часть остается горизонтальной. Таким образом, стержень, опирающийся обоими концами, ведет себя точно так же, как если бы он был закреплен посередине, а на каждый из обоих концов действовала бы сила  $P/2$ , направленная вверх. Следовательно, стрела прогиба будет равна

$$\lambda = \frac{P \cdot L^3}{4Eab^3},$$

откуда

$$E = \frac{P \cdot L^3}{4ab^3\lambda}. \quad (11.16)$$

**Тензор напряжений.** В самом общем случае при любом нагружении совокупность всех возможных напряжений в окрестности точки (на всех площадках, проходящих вблизи точки) опреде-

ляется шестью величинами (числами), которые представляют собой компоненты симметричного тензора второго ранга.

Для рассмотрения связи между напряжениями на различных площадках, проходящих вблизи данной точки, можно рассмотреть равновесие бесконечно малого тетраэдра, вырезанного из тела вблизи этой точки (рис. 11.7). Будем отмечать оси системы координат цифрами 1, 2, 3, а проекции векторов на эти оси — соответствующими цифровыми индексами. Обозначим  $dS$  — площадь грани  $ABC$ ,  $dS_1$  — площадь грани  $OBC$ ,  $dS_2$  — площадь  $OBA$ ,  $dS_3$  — площадь  $OAC$ .

Равновесие всех сил, действующих на поверхность тетраэдра, будет иметь место при условии

$$\sigma_v dS - \sigma_1 dS_1 - \sigma_2 dS_2 - \sigma_3 dS_3 = 0, \quad (11.17)$$

где  $\sigma_v$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  — векторы напряжений, действующих на соответствующие площадки. После деления (11.17) на  $dS$  получаем

$$\sigma_v = v_1 \cdot \sigma_1 + v_2 \cdot \sigma_2 + v_3 \cdot \sigma_3, \quad (11.18)$$

где  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  — направляющие косинусы нормали к площадке  $dS$ , т. е. три вектора  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  определяют вектор  $\sigma_v$  — напряжение на любой площадке с нормалью  $v$ .

Три вектора представляют совокупность девяти чисел — проекций этих векторов на оси координат. Запишем векторы  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  в компонентах

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}e_1 + \sigma_{21}e_2 + \sigma_{31}e_3, \\ \sigma_2 &= \sigma_{12}e_1 + \sigma_{22}e_2 + \sigma_{32}e_3, \\ \sigma_3 &= \sigma_{13}e_1 + \sigma_{23}e_2 + \sigma_{33}e_3. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Здесь приняты обозначения:  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  — единичные векторы осей координат. Компоненты с одинаковыми индексами:  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  — нормальные к площадке напряжения, с различными индексами:  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{32}$  ... — касательные напряжения.

Подставим значения векторов  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  из (11.19) в (11.18) после скалярного поочередного умножения на  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ , найдем проекции вектора  $\sigma_v$  на оси 1, 2, 3:

$$\begin{aligned} \sigma_{1v} &= \sigma_{11}v_1 + \sigma_{12}v_2 + \sigma_{13}v_3, \\ \sigma_{2v} &= \sigma_{21}v_1 + \sigma_{22}v_2 + \sigma_{23}v_3, \\ \sigma_{3v} &= \sigma_{31}v_1 + \sigma_{32}v_2 + \sigma_{33}v_3. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Записи (11.20) соответствует более короткая запись, если использовать понятие тензора напряжений  $T$ :

$$\sigma_v = T \cdot v, \quad (11.21)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор нормали к площадке, тензор  $T$  представляется матрицей

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (11.22)$$

Используя условия равновесия выделенного объема, можно показать, что

$$\sigma_{31} = \sigma_{13}, \quad \sigma_{32} = \sigma_{23}, \quad (11.23)$$

т. е. тензор напряжения является симметричным, его компоненты с разными индексами попарно равны друг другу.

**Коэффициент Пуассона.** При одностороннем растяжении стержня кроме изменения длины изменяются также его поперечные размеры. Относительное изменение поперечного размера определяется равенством

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\Delta l_{\perp}}{l_{\perp}}, \quad (11.24)$$

где  $l$  и  $\Delta l_{\perp}$  — некоторые линейные поперечные размеры стержня и их изменение. Величина

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon} = -\frac{(\Delta l_{\perp}/l_{\perp})}{(\Delta l/l)} \quad (11.25)$$

называется коэффициентом Пуассона. Знак «минус» учитывает, что при растяжении поперечные размеры уменьшаются, а при сжатии увеличиваются.

Пусть имеется куб со стороной  $l$  и объемом  $V=l^3$ . При растяжении его объем изменится

$$V' = l(1 + \varepsilon) \cdot l^2(1 + \varepsilon_{\perp}) = V(1 + \varepsilon + 2\varepsilon_{\perp}) \quad (11.26)$$

(здесь отброшены члены второго порядка малости). Из (11.26) следует, что

$$\frac{(V' - V)}{V} = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon + 2\varepsilon_{\perp} = \varepsilon(1 - 2\mu). \quad (11.27)$$

При растяжении объем тела увеличивается, при сжатии уменьшается, поэтому  $\Delta V$  и  $\varepsilon$  в (11.27) одного знака, а значит,

$$\mu \leq 1/2. \quad (11.28)$$

Таким образом, максимальное значение коэффициента Пуассона равно  $\mu_{\max} = 1/2$ . В этом случае при растяжении и сжатии объема тела не изменяется.

**Тензор деформаций.** Рассмотрим деформацию произвольного малого объема тела. Пусть до деформации положение произвольных двух точек определялось векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , а после дефор-

мации —  $\mathbf{r}'_1$  и  $\mathbf{r}'_2$ . Расстояния между этими точками до и после деформации равны соответственно

$$dl = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

$$dl' = |\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1| = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2},$$

где  $dx_i$ ,  $dx'_i$  — расстояния между точками вдоль  $i$ -й координаты  $i=1 \div 3$  до и после деформации. Обозначим  $dx'_i = dx_i + ds_i$  ( $i=1 \div 3$ ), тогда для малых деформаций ( $ds_i/dx_i \ll 1$ ) получим

$$(dl')^2 = \sum_{i=1}^3 (dx_i + ds_i)^2 = (dl)^2 + 2 \sum_{i=1}^3 ds_i dx_i,$$

учитывая, что

$$ds_i = \frac{\partial s_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial s_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial s_i}{\partial x_3} dx_3,$$

получаем

$$(dl')^2 = (dl)^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j.$$

Коэффициенты перед  $dx_i \cdot dx_j$

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) \quad (11.29)$$

являются элементами тензора деформации  $S_c$ . Как видно из (11.29), он является симметричным. Можно показать, что выполняется соотношение

$$d\mathbf{r}' = (S_c + S_a) d\mathbf{r}, \quad (11.30)$$

где  $S_c$  — тензор деформаций,  $S_a$  — антисимметричный тензор, определяющий поворот элемента рассматриваемого объема вокруг осей 1, 2, 3.

Рассмотрим физический смысл отдельных компонент тензора  $S_c$ . Диагональные элементы  $s_{ii} = \frac{\partial s_i}{\partial x_i}$  ( $i=1 \div 3$ ) представляют собой относительные удлинения или сжатия  $\epsilon_i$  по соответствующим координатам. Остальные представляют собой повороты линий, которые были до деформации параллельны осям координат. Эти линии повернутся на некоторые малые углы; проекция линий, соответствующих осям 1, 2, на плоскость (1, 2) показана на рис. 11.18. Из чертежа видно, что

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1}$$

равно изменению вследствие деформации прямых углов в плоскости, нормальной к оси 3, которое обозначают  $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ . Аналогично

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_1} = \gamma_{13} = \gamma_{31}, \quad \frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2} = \gamma_{23} = \gamma_{32},$$

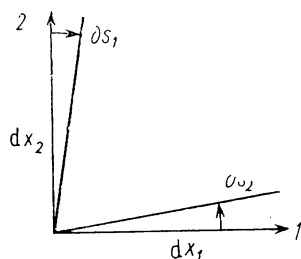


Рис 11.8

т. е. тензор  $S_c$  можно записать в виде

$$S_c = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (11.31)$$

**Связь между напряжениями и деформациями.** Для кристаллического анизотропного тела, упругие свойства которого зависят от выбранного направления, существует зависимость каждой компоненты тензора деформаций от всех компонент тензора напряжений. В случае изотропного тела достаточно только двух коэффициентов, чтобы установить связь между деформациями и напряжениями. В частности, для произвольной деформации однородного кубика выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \{ (1 + \mu) \sigma_{11} - \mu (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \{ (1 + \mu) \sigma_{22} - \mu (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \{ (1 + \mu) \sigma_{33} - \mu (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \}. \end{aligned} \quad (11.32)$$

Действительно, пусть к малому элементу объема приложены произвольные напряжения, тогда относительное удлинение вдоль, например, оси 1 будет меньше величины  $\sigma_{11}/E$  (см. (11.3)) на величину дополнительного сжатия, возникающего из-за действия растягивающих усилий по осям 2 и 3 (см. (11.25)), т. е.

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_{11}}{E} - \mu \left( \frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\sigma_{33}}{E} \right),$$



откуда и следует первое равенство из (11.32), аналогичные соотношения выполняются и при рассмотрении удлинений вдоль других осей.

Соотношения (11.32) позволяют определить изменение объема при произвольной деформации и связь между модулем Юнга и модулем сдвига.

Пусть деформации подвергается тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами  $l_1, l_2, l_3$ . Под действием приложенных напряжений при малых деформациях объем тела изменится на величину

$$\Delta V = \Delta(l_1 l_2 l_3) = l_1 l_2 \Delta l_3 + l_1 \Delta l_2 l_3 + \Delta l_1 l_2 l_3,$$

т. е.

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l_1}{l_1} + \frac{\Delta l_2}{l_2} + \frac{\Delta l_3}{l_3} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

При всестороннем сжатии, когда  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma$ , учитывая (11.32), получаем

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{E} (1 - 2\mu) \sigma. \quad (11.33)$$

При деформации сдвига изменения объема не происходит, т. е.  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ , поэтому из (11.32) получаем

$$\frac{1}{E} \{ (1 - 2\mu) \sigma_{11} + (1 - 2\mu) \sigma_{22} + (1 - 2\mu) \sigma_{33} \} = 0.$$

Таким образом, деформация сдвига возможна только при выполнении условия

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0, \quad (11.34)$$

подставляя это условие в (11.32), получаем

$$\varepsilon_1 = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{11}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{22}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{33}. \quad (11.35)$$

Покажем, что деформация, при которой выполняются соотношения (11.34), (11.35), является деформацией сдвига. Для простоты рассмотрим случай, когда  $l_2 = l_1 = l$  и  $\sigma_3 = 0$ , т. е.  $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$ ,  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$  (рис. 11.9). Деформацию в этом случае удобно рассматривать для параллелепипеда с основанием  $EFGH$ , повернутого относительно  $ABCD$  на угол  $\pi/4$  ( $EFGH$  — квадрат со стороной  $a = l/\sqrt{2}$ ). На стороны квадрата будут действовать только касательные усилия  $\tau$ , изменение углов между сторонами квадрата  $EFGH$  можно выразить через относительные изменения длин его диагоналей  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$  (см. рис. 11.9). Учитывая, что  $E'O = l/(2\sqrt{2})$ , получаем

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{l \varepsilon_1 / (2\sqrt{2})}{l / (2\sqrt{2})} = \varepsilon_1 = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{11}. \quad (11.36)$$

Учитывая, что напряжение, действующее на площадку, равно отношению силы к площади, на которую она действует, получаем

$$\tau = \frac{\sqrt{\left(\sigma_{11} \cdot \frac{l}{2} \cdot l_3\right)^2 + \left(\sigma_{22} \cdot \frac{l}{2} \cdot l_3\right)^2}}{a l_3} = \frac{\left(\sigma_{11} \cdot \frac{l}{2} \cdot l_3\right) \cdot \sqrt{2}}{(l/\sqrt{2}) l_3} = \sigma_{11}. \quad (11.37)$$

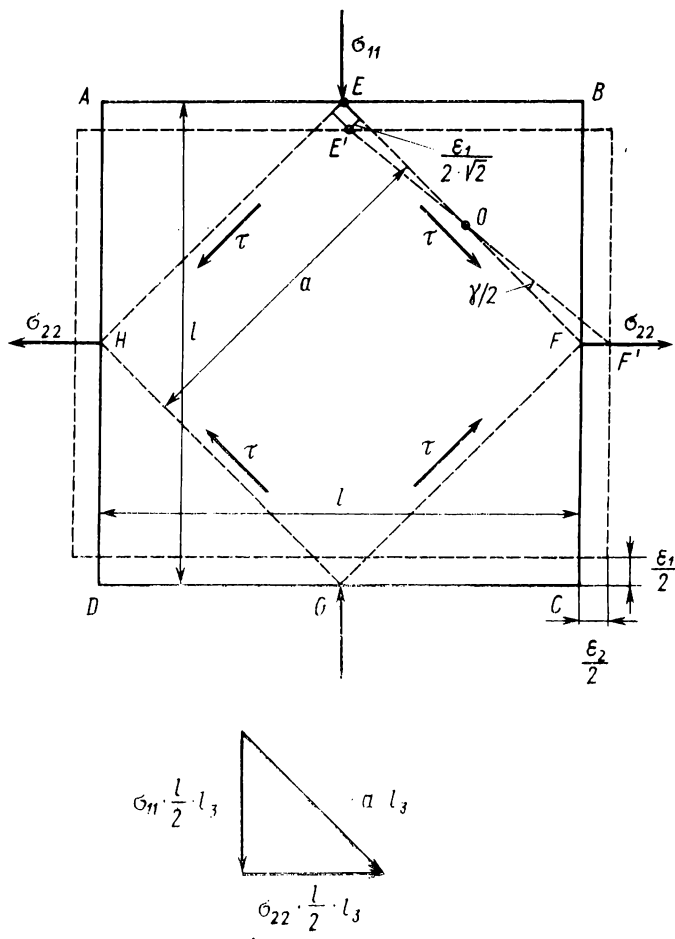


Рис. 11.9

Из (11.37) и (11.36) следует

$$\gamma = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau.$$

Так как для деформации сдвига должно выполняться соотноше-

ние (11.5), то получаем связь между модулем Юнга и модулем сдвига

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (11.38)$$

**Потенциальная энергия при деформации.** Для определения потенциальной энергии деформации необходимо определить работу, которую нужно затратить на деформацию, для элементарного деформируемого объема  $dv = dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$ .

Рассмотрим работу для нормальных усилий. Учитывая, что сила, действующая на площадку, расположенную перпендикулярно 1-й оси, равна  $\sigma_{11}dx_2dx_3$ , а элементарное перемещение равно  $d\varepsilon_1dx_1$ , находим выражение для элементарной работы для усилия, параллельного оси 1:

$$\delta A_1 = (\sigma_{11}dx_2 \cdot dx_3) \cdot (d\varepsilon_1 \cdot dx_1). \quad (11.39)$$

Аналогичные соотношения будут выполняться и для других направлений. Выражения для  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  определим из (11.32)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\mu} \left( \varepsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu} 3\varepsilon \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1+\mu} \left( \varepsilon_2 + \frac{\mu}{1-2\mu} 3\varepsilon \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\mu} \left( \varepsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu} 3\varepsilon \right), \end{aligned} \quad (11.40)$$

здесь обозначено  $3\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ .

Учитывая (11.39), (11.40), а также (11.38), получаем окончательные выражения для элементарных работ

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= 2G \left( \varepsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu} 3\varepsilon \right) d\varepsilon_1 dv, \\ \delta A_2 &= 2G \left( \varepsilon_2 + \frac{\mu}{1-2\mu} 3\varepsilon \right) d\varepsilon_2 dv, \\ \delta A_3 &= 2G \left( \varepsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu} 3\varepsilon \right) d\varepsilon_3 dv. \end{aligned} \quad (11.41)$$

Полную работу для нормальных усилий  $dA_n$ , затраченную на деформацию малого объема, получаем, интегрируя (11.41):

$$\begin{aligned} dA_n &= 2G \left( \int_0^{\varepsilon_1} x dx + \int_0^{\varepsilon_2} x dx + \int_0^{\varepsilon_3} x dx + \frac{\mu}{1-2\mu} \int_0^{3\varepsilon} x dx \right) dv = \\ &= G \left( \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (3\varepsilon)^2 \right) dv. \end{aligned}$$

Плотность работы для нормальных усилий (деформация растяжения или сжатия) имеет вид

$$u_1 = \frac{dA_n}{dv} = G \left( \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (3\epsilon)^2 \right) dv. \quad (11.42)$$

Работу для касательных усилий находим, учитывая связь  $\sigma_{ij} = G\gamma_{ij}$  ( $i, j = 1 \div 3, i \neq j$ ).

$$\begin{aligned} dA_k &= \left( \int_0^{\gamma_{12}} \sigma_{12} d\gamma_{12} + \int_0^{\gamma_{13}} \sigma_{13} d\gamma_{13} + \int_0^{\gamma_{23}} \sigma_{23} d\gamma_{23} \right) = \\ &= \frac{1}{2} G (\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2) dv. \end{aligned} \quad (11.43)$$

Полная плотность работы, а следовательно, и потенциальная энергия при деформации равны

$$\begin{aligned} u &= u_1 + \frac{dA_k}{dv} = G \left( \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \frac{1}{2} \gamma_{12}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{13}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \gamma_{23}^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (3\epsilon)^2 \right). \end{aligned} \quad (11.44)$$

Плотность потенциальной энергии при деформации можно записать и через напряжения, для этого в выражениях для элементарных работ вместо произведений  $\sigma_{ii} d\epsilon_i$  нужно подставить

$$\sigma_{ii} \frac{1}{2G} \left( d\sigma_{ii} - \frac{\mu}{1+\mu} d(3\sigma) \right),$$

которые следуют из (11.32). В этом случае получаем

$$u = \frac{1}{4G} \left( \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{13}^2 + 2\sigma_{23}^2 - \frac{\mu}{1+\mu} (3\sigma)^2 \right). \quad (11.45)$$

*Литература:* [2] — гл. X; [4] — гл. X; Матвеев А. Н. Молекулярная физика. М.: Высшая школа, 1987. § 44.

## Лабораторная работа 17

### Определение модуля упругости из растяжения и изгиба

Целью работы является определение модуля Юнга исследуемого материала, который характеризует элементарную деформацию растяжения или сжатия (см. введение). Основные характеристики этих деформаций и соотношения, необходимые для выполнения данной работы, были рассмотрены во введении к главе. Измерения проводятся прямыми методами при использовании деформации растяжения и изгиба.

**Упражнение 1. Определение модуля Юнга из деформации растяжения.**

**Принадлежности:** 1) прибор, 2) линейка, 3) зрительная труба, 4) шкала, 5) микрометр.

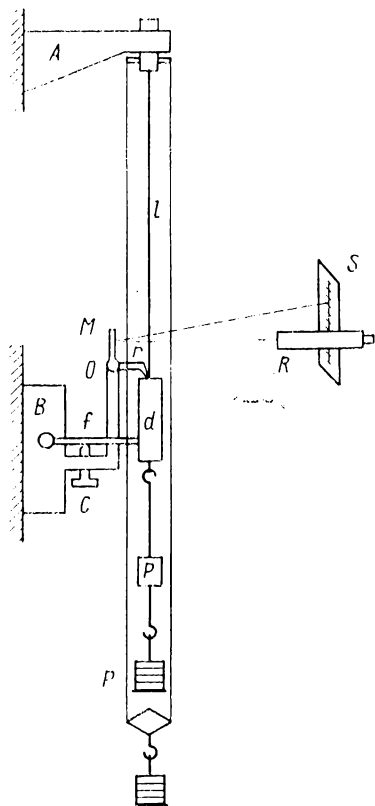


Рис. 11.10

**Описание прибора.** Прибор состоит из двух кронштейнов  $A$  и  $B$  (рис. 11.10), расположенных один над другим и служащих для закрепления проволоки из исследуемого материала. При нагрузке, осуществляемой грузами  $PP$ , проволока удлиняется и стержень  $r$ , несущий зеркальце  $M$  и опирающийся на цилиндр  $d$ , вращается вокруг оси  $O$ .

При удлинении проволоки на  $\Delta l$  зеркальце повернется на угол  $\alpha$  и будет иметь место соотношение

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta l}{b}, \quad (1)$$

где  $b$  — длина стержня. В условиях опыта длина стержня  $r$  выбирается такой, что  $\Delta l/b \ll 1$ . В этом случае  $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ .

Изменение положения зеркальца может фиксироваться по шкале  $S$ , изображение которой рассматривают в зеркальце через трубу  $R$ , имеющую в окуляре крест нитей или одну горизонтальную нить. Если  $\Delta n$  — разность делений шкалы при повороте зеркальца на угол  $\alpha$ , а  $D$  — расстояние от зеркала до шкалы, то можно записать

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\Delta n}{D}. \quad (2)$$

Так как угол  $\alpha$  мал, то  $\operatorname{tg} \alpha \simeq 2\operatorname{tg} \alpha$ .

После сопоставления полученных формул (1) и (2) получаем

$$\Delta l = \frac{\Delta n}{2D} b. \quad (3)$$

Нижний кронштейн  $B$  имеет арретир  $f$ , пользуясь которым (заворачивая винт  $C$ ), можно освобождать проволоку от нагрузки. Грузы, необходимые для нагрузки проволоки, берут с особого подвеса  $K$ , укрепленного на верхнем кронштейне; при снятии нагрузки грузы укладывают на подвес. Этим достигается постоянство нагрузки на верхний кронштейн и тем самым постоянство прогиба последнего. Нагрузку проволоки и снятие нагрузки нужно всегда производить при поднятом арретире  $f$  (винт  $C$  завернут).

Настройку установки производят следующим образом. Сначала проволоку нагружают половиной имеющихся грузов, находят в трубе изображение шкалы, фокусируют трубу, а шкалу устанавливают так, чтобы была видна ее середина. Затем измеряют линейкой расстояние между зеркалом и шкалой  $S$ , после этого больше не сдвигают ни шкалу, ни трубу. Нулевую отметку на шкале отмечают после снятия всех грузов и опускания арретира.

**Измерения.** Длина проволоки  $l$  измеряется линейкой при опущенном арретире, а ее диаметр, необходимый для определения сечения  $S$ , — микрометром. Измерение диаметра проволоки следует проделать несколько раз в разных местах и из полученных значений взять среднее арифметическое.

Последовательно нагружая проволоку грузами один за другим (на каждом из них указан его вес), производят отсчеты делений шкалы, наблюдаемых в трубу, и отмечают, на сколько делений перемещается изображение шкалы относительно нулевой отметки. Так проделывают для всех грузов, снимая их с подвеса, а после этого так же последовательно идут в обратном порядке, снимая грузы и перекладывая их на подвес  $K$ . Если после снятий всех грузов нулевая точка не совпадает с прежней, берут среднее значение из двух показаний; так же поступают с каждым двумя отсчетами, получаемыми при одинаковых нагрузках.

Необходимо построить график изменения удлинения проволоки с изменением величины нагрузки и убедиться, что имеет место линейная зависимость (закон Гука).

Произведенные измерения дают возможность определить удлинение проволоки  $\Delta l$  по формуле (3) (величина  $b$  дается как по-

стоянная прибора) и затем величину модуля упругости по формуле (11.3) для каждой нагрузки. Истинное значение  $E$  получается как среднее арифметическое из отдельных значений ( $E$  выражается в  $\text{Н/м}^2$ ).

**Упражнение 2. Определение модуля упругости из изгиба.**

**Принадлежности:** 1) прибор для определения модуля упругости из изгиба, к нему набор стержней; 2) микроскоп для измерения вертикальных расстояний; 3) штангенциркуль; 4) линейка со шкалой.

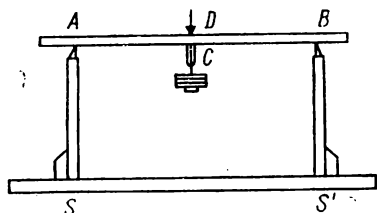


Рис. 11.11

**Описание прибора.** Прибор для определения модуля упругости из изгиба состоит из массивной платформы  $SS'$  (рис. 11.11) с двумя стойками на концах. На стойках укреплены стальные призмы так, что ребра их параллельны между собой. Микроскоп для измерения вертикальных расстояний укреплен в горизонтальном положении на раздвижной стойке, основанием которой служит треножник с установочными винтами. Микроскоп снабжен окулярным микрометром и свободно вращается около вертикальной оси. Стойка может раздвигаться и имеет деления. При грубых измерениях и измерениях таких расстояний, которые не помещаются в пределах окулярного микрометра, пользуются шкалой на стойке. При измерениях малых расстояний пользуются одним окулярным микрометром.

**Измерения.** На призмы прибора накладывают стержень из исследуемого материала так, чтобы середина его  $C$  совпала с серединой расстояния между  $A$  и  $B$  (рис. 11.11). В точке  $C$  на стержень подвешивают стремя для накладки грузов.

На конец вертикального заостренного штифта, укрепленного на стремени, направляют микроскоп, установленный предварительно горизонтально при помощи установочных винтов и уровня. Определяют цену одного деления окулярного микрометра. Для этого приводят нулевое деление микрометра в совпадение с концом штифта и замечают положение указателя на стойке микроскопа. Затем, изменяя высоту стойки, приводят последнее деление микрометра в совпадение с рассматриваемым концом штифта  $D$  и замечают перемещение указателя по шкале стойки. Отсюда вычисляют цену одного деления микрометра.

После этого нагружают стремя последовательно грузами в 1, 2 и 3 кг и каждый раз отсчитывают, на сколько делений проги-

бається стержень. Затем проделывают ту же операцию в обратном порядке, т. е. разгружают постепенно стержень, отмечая всякий раз прогиб его. Перемещение (прогиб)  $CC'$  середины стержня и есть стрела его прогиба. Зная цену одного деления микрометра, можно выразить стрелу прогиба в миллиметрах. Необходимо построить график изменения величины стрелы прогиба с изменением нагрузки и убедиться, что имеет место линейная зависимость (закон Гука).

Наконец, измеряют длину стержня  $L$ , т. е. расстояние между ребрами призмы, на которые он опирается, и стороны прямоугольного сечения стержня. Измерения длины стержня производят масштабной линейкой с точностью до 1 мм, а длины и ширины сечения стержня — микрометром с точностью до 0,01 мм. Пользуясь данными измерений, вычисляют модуль упругости по формуле (11.16).

Измерения модуля упругости по стреле прогиба производят для трех стержней различных размеров и из различного материала.

*Литература:* [4] — § 81—84, 86—88.

### *Лабораторная работа 18*

#### **Определение модуля сдвига из кручения**

Одним из возможных способов измерения модуля сдвига является использования для этой цели деформации кручения. Во введении к главе было показано, что деформация кручения не является элементарным видом деформации. В каждом малом объеме тела, подвергающегося деформации кручения, происходит деформация сдвига. Для простой геометрии испытываемого тела, например, круглого стержня, легко получить связь между модулем кручения и модулем сдвига (см. введение).

Целью работы являются экспериментальное определение модуля кручения для однородного стержня (проволоки) и расчет модуля сдвига по формуле (11.9).

**Принадлежности:** 1) прибор для определения угла закручивания проволоки; 2) осветитель с полупрозрачной миллиметровой шкалой; 3) масштабная линейка; 4) секундомер.

Измерение модуля кручения может быть выполнено статическим или динамическим методом. В первом случае измеряется угол закручивания проволоки под действием определенного закручивающего момента. Во втором случае измеряется период крутильных колебаний маятника, подвешенного на исследуемой проволоке. Определение модуля кручения обоими методами производится одним и тем же прибором, показанным на рис. 11.12. Рассмотрим последовательно каждый метод.

**Статический метод.** К нижнему концу проволоки  $AB$  длиной  $L$ , подвешенной на деревянной раме  $C$ , прикреплен металлический



диск  $D$  радиуса  $R_d$ . Верхний конец проволоки зажимается винтом  $E$ , благодаря чему он неподвижен. По окружности диска навиты в одну сторону две нити, пропущенные через блоки  $F_1$  и  $F_2$  и несущие на концах два одинаковых груза  $P_1$  и  $P_2$ . Эти грузы действуют как пара сил, приложенных в противоположных точках одного и того же диаметра диска.

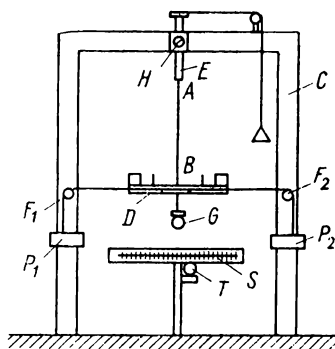


Рис. 11.12

С диском жестко связано зеркальце  $G$ , поворачивающееся на некоторый угол при закручивании проволоки под влиянием приложенной пары сил. Поворот зеркала фиксируется на шкале  $S$ , по которой перемещается отраженное от зеркала изображение нити осветителя  $T$ .

Если при равновесии нить совпадает с делением  $n_0$ , а после поворота с делением  $n$ , то при малых углах поворота имеет место соотношение

$$\varphi = \frac{n - n_0}{2d}. \quad (1)$$

Здесь  $d$  — расстояние от зеркала до шкалы, выраженное в тех же единицах длины, что и деления на шкале.

Подставляя значение момента  $M = 2PR$  и  $G$  из (11.9) в равенство (11.6) и решая его относительно  $G$ , будем иметь

$$G = \frac{4RPL}{\pi r^4 \varphi}. \quad (2)$$

Угол закручивания определяется по формуле (1). Другие входящие в формулу (2) величины измеряются непосредственно.

**Динамический метод.** Этот метод основан на зависимости периода крутильных колебаний маятника, подвешенного на проволоке, от упругих свойств материала проволоки. При измерении используется тот же прибор, что и в статическом методе.

Крутильным маятником служит диск  $D$ , который в данном случае уже не соединяется с грузами нитями. Момент инерции этого

диска может увеличиваться надеванием на штифты, имеющиеся на диске, специальных грузов. Штифты расположены по двум концентрическим окружностям. Изменяя расстояние от грузов до центра диска, можно изменять момент инерции, а вместе с этими период колебаний маятника.

Период колебаний определяется по времени, в течение которого маятник совершает некоторое число полных колебаний.

**Упражнение 1. Определение модуля сдвига статическим методом.** Установить трубу осветителя так, чтобы видеть на шкале отражение зайчика от зеркальца. При этом шкала должна быть перпендикулярна к оси трубы. Освободив винт  $E$ , осторожно поворачивают на небольшой угол верхний конец проволоки так, чтобы риска отраженного от зеркальца зайчика попадала на середину шкалы, и фиксируют это положение. Записывают нулевой отсчет  $n_0$ , т. е. деление шкалы, на которое попадает зайчик до подвешивания грузов. Прикрепив к концам нитей платформы, нагружают их грузами, записывают отсчет по шкале  $n$ , соответствующий новому положению равновесия (веса грузов на платформах должны быть между собой примерно равны), и затем, сняв грузы, вновь производят нулевой отсчет  $n_0$ . Подобные измерения повторяют для двух, трех и т. д. грузов, каждый раз предварительно определяя нулевой отсчет.

Проделав измерения с максимальным грузом, повторяют измерения в обратном порядке, постепенно уменьшая величину грузов на платформах. За угол закручивания, соответствующий тому или иному грузу, берут среднее значение из измерений в одном и другом направлениях

$$\frac{(n_i - n_{0i}) + (n'_i - n'_{0i})}{2}$$

(штрихами отмечены отсчеты, производившиеся при уменьшении грузов). Измеряют расстояние  $d$  от зеркальца до шкалы и вычисляют модуль кручения для каждой нагрузки. Сравнивая значения модуля кручения, полученные при различных моментах сил, убеждаются, что все они имеют приблизительно одинаковое значение, т. е. в пределах применявшихся нагрузок закон Гука выполняется.

После этого, промерив все входящие в формулу (2) величины, вычисляют модуль сдвига. Измерение диаметра проволоки следует произвести в нескольких местах. Величина модуля вычисляется в дин/см<sup>2</sup>, Н/м<sup>2</sup>.

**Упражнение 2. Определение модуля сдвига из крутильных колебаний.** Если колеблющееся твердое тело совершает вращательные движения, то к нему может быть применен основной закон вращательного движения

$$M = J \frac{d\omega}{dt},$$

где  $M$  — вращающий момент относительно оси  $AB$  (см. рис. 11.12),  $J$  — момент инерции тела относительно той же оси, и  $d\omega/dt$  — угловое ускорение. Обозначая через  $\ddot{\varphi}$  вращающий момент (см. (11.6)), можно написать

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -f\varphi.$$

Вращающий момент направлен всегда так, чтобы уменьшить угловое отклонение  $\varphi$ .

Из этого уравнения видно, что в рассматриваемом движении ускорение  $d^2\varphi/dt^2$  пропорционально смещению  $\varphi$  и направлено противоположно ему, а это есть существенный признак гармонического колебательного движения.

Итак, тело совершает гармонические колебания, а периоды этих колебаний можно найти, вспомнив, что множитель пропорциональности между  $d^2\varphi/dt^2$  и  $\varphi$ , в данном случае  $f/J$ , должен быть равен

$$\omega_0^2 = 4\pi^2/T^2,$$

т. е.

$$4\pi^2/T^2 = f/J, \quad (3)$$

откуда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{f}}.$$

Здесь  $T$  — период колебаний маятника.

Для того чтобы из этого выражения найти  $f$ , необходимо исключить неизвестный момент инерции  $J$ , для этого в работе определяются два периода колебаний маятника  $T_1$  и  $T_2$ .

**Измерения.** Работу выполняют следующим образом. Надевают на крайние штифты диска (удаленные от оси вращения) четыре груза, при этом платформы с грузами  $P_1$  и  $P_2$  отсоединяются от нитей. Наблюдая за изображением на шкале, определяют деление, соответствующее положению равновесия. Устанавливают на это деление перемещающуюся по шкале риску отраженного от зеркальца зайчика. Сообщают системе вращательный импульс так, чтобы диск совершал крутильные колебания с небольшой амплитудой.

Для этого отворачивают немного винт  $H$  и легким рывком потягивают за шнурок, соединенный через рычажок с верхним креплением проволоки. Следует обратить внимание на то, чтобы при этом не было поступательных колебаний и чтобы изображение шкалы не выходило из поля зрения.

Измеряют суммарное время ста колебаний маятника и вычисляют период колебания маятника  $T_1$ . Переставив грузы на внутренние штифты диска, таким же способом измеряют измененный период колебаний  $T_2$ .

Из этих определений имеем

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{f}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{f}},$$

откуда

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{J_1}{J_2}.$$

Момент инерции крутильного маятника можно представить как момент инерции грузов  $4ml^2$  плюс момент инерции диска и проволоки  $j$ , т. е.

$$J_1 = 4ml_1^2 + j, \quad J_2 = 4ml_2^2 + j.$$

Для того чтобы исключить неизвестное  $j$ , вычитаем  $J_1$  из  $J_2$ :

$$J_2 - J_1 = 4m(l_2^2 - l_1^2). \quad (4)$$

Подставив сюда значение  $J_2 = J_1 T_2^2 / T_1^2$ , из уравнения (4) найдем

$$J_1 = \frac{4mT_1^2(l_2^2 - l_1^2)}{T_2^2 - T_1^2}.$$

Подставив, наконец, это выражение в уравнение (3), найдем модуль кручения  $f$ :

$$f = \frac{4\pi^2 J_1}{T_1^2} = \frac{16\pi^2 m(l_2^2 - l_1^2)}{T_2^2 - T_1^2}.$$

Определив расстояния осей грузов от оси вращения диска  $l_1$ ,  $l_2$  и их массу, по формуле (11.9) вычисляют модуль сдвига

$$G = \frac{32Lm\pi(l_2^2 - l_1^2)}{r^4(T_2^2 - T_1^2)}.$$

*Литература:* [2] — § 78, 79; [4] — § 84.

### *Лабораторная работа 19*

#### **Определение коэффициента Пуассона и частоты биений**

Как известно, при растяжении или сжатии кроме продольных размеров меняются и поперечные размеры тела. Связь между продольными и поперечными деформациями определяется коэффициентом Пуассона. Во введении было показано, что деформации сдвига и растяжения являются в общем случае зависимыми друг от друга, причем модуль сдвига и модуль упругости (модуль

Юнга) связаны между собой простым соотношением (11.38). В лабораторной работе проводится экспериментальное определение модуля Юнга и модуля упругости, коэффициент Пуассона вычисляется на основе (11.38).

**Принадлежности:** 1) установка; 2) секундомер; 3) масштабная линейка.

При колебаниях груза, подвешенного на пружинке, обычно рассматривают поступательное движение по вертикали вверх и вниз. Однако это движение не является единственным. Одновременно можно наблюдать и периодическое вращение груза вокруг его вертикальной оси. Если груз, спокойно висающий, осторожно повернуть вокруг этой оси и отпустить, кроме крутильных колебаний можно наблюдать и вертикальные.

Для пружины крутильные колебания вызываются деформацией изгиба, сводимой к деформации сжатия (растяжения) продольных слоев ее материала, а вертикальные — деформацией изгиба, сводимой к сдвигу слоев в поперечном сечении материала пружины. Известно, что между модулем сдвига  $G$  и модулем Юнга  $E$  имеется связь, даваемая уравнением (11.38). Наличие одной деформации ведет к появлению другой.

Для пружин с малыми углами наклона витков к горизонтали обычно пренебрегают деформацией сжатия по сравнению с деформацией сдвига. Это позволяет при их растяжении рассматривать только вертикальные колебания. Для этих же пружин при их закручивании можно пренебречь деформацией сдвига и рассматривать только крутильные колебания. При этих условиях легко определить коэффициент Пуассона по измерениям периода колебаний груза на пружине.

Деформация кручения проволоки пружины при вертикальных колебаниях вызывается моментом внешних сил. В том случае, когда груз подвешен на оси пружины, он равен  $M = mg(D/2)$ , где  $m$  — масса груза,  $g$  — ускорение свободного падения,  $D$  — диаметр пружины. В результате закручивания элемента длины проволоки  $dl$  на угол  $d\varphi$  нижний конец проволоки опустится на  $dx = R d\varphi$ . Используя соотношение (11.6) и интегрируя по всей длине проволоки, получаем

$$mg = f/(D/2)^2 x.$$

Учитывая (11.9), получаем выражение для коэффициента жесткости пружины при вертикальных колебаниях груза (без учета деформации сжатия)

$$k_1 = \frac{Gd^4}{8nD^3}, \quad (1)$$

здесь  $d$  — диаметр проволоки пружины,  $n$  — число витков проволоки.

Рассмотрим крутильные колебания пружины. В этом случае пружина претерпевает деформацию изгиба (см. введение к главе), причем в каждом малом объеме материала пружины происходит

деформация сжатия или растяжения. Рассмотрим деформацию элемента проволоки длины  $dl$  и кругового поперечного сечения аналогично тому, как это было сделано во введении для стержня с прямоугольным сечением. На каждый элемент поверхности поперечного сечения, удаленный от оси проволоки на расстояние  $r$ , а от нейтрального слоя на расстоянии  $x=r \sin \alpha$ , действует усилие  $dF=\sigma r dr d\alpha$ , причем нормальное напряжение  $\sigma$  линейно изменяется при удалении от нейтрального слоя

$$\sigma = \sigma_0 \frac{x}{d/2},$$

где  $\sigma_0$  — напряжение в слое, наиболее удаленном от нейтрального, находящемся на расстоянии  $d/2$ . Момент всех усилий относительно нейтрального слоя равен

$$M = 2 \int_0^{d/2} \int_0^\pi (r \sin \alpha) dF(r, \alpha) = \frac{r^4 \sigma_0}{d} \int_0^{d/2} \int_0^\pi r^3 \sin^2 \alpha dr d\alpha = \frac{\pi}{32} \sigma_0 d^3.$$

Используя закон Гука (11.3), находим связь между моментом  $M$  и удлинением  $\delta$  слоя, наиболее удаленного от нейтрального,

$$M = \frac{\pi}{32} d^3 E \frac{\delta}{dl},$$

учитывая, что при удлинении внешнего слоя на  $\delta$ , угол  $d\varphi$  между поперечными сечениями проволоки пружины, расположенными на расстоянии  $dl$ , меняется на величину  $\delta/(d/2)$ . Получаем связь между моментом внешних сил и углом закручивания всей пружины

$$M = \frac{\pi}{32} d^3 E \frac{d/2}{l} \varphi,$$

где  $l = \pi D n$  — длина проволоки пружины. Отсюда следует, что коэффициент жесткости  $k_2$  пружины при крутильных колебаниях (без учета деформации сдвига) равен

$$k_2 = \frac{E d^4}{64 n D}. \quad (2)$$

Уравнение движения груза при малых вертикальных колебаниях можем записать в виде

$$m \ddot{x} = -k_1 x \quad (3)$$

и для крутильных колебаний в виде

$$J \ddot{\varphi} = -k_2 \varphi, \quad (4)$$

где  $m$  и  $J$  — соответственно масса и момент инерции груза, подвешенного к нижнему концу пружины,  $x$  и  $\varphi$  — соответственно координаты линейного и углового смещений груза.

Из уравнений (3) и (4) получим

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k_2}}, \quad (5)$$

где  $T_1$  — период вертикальных колебаний,  $T_2$  — период крутильных колебаний.

Уравнения (11.38), (1÷5) дают

$$|\mu| = \frac{4}{D^2} \frac{J}{m} \frac{T_1^2}{T_2^2} - 1. \quad (6)$$

Этим уравнением и пользуются при вычислении коэффициента Пуассона материала пружины.

Если рассматривать задачу о колебаниях более полно, то груз, подвешенный на винтовой пружине, необходимо считать системой с двумя степенями свободы. Груз одновременно совершает два вида движения: крутильные и вертикальные колебания. Формально это аналогично движению двух маятников, соединенных между собой легкой пружинкой (связанные маятники). Особенности таких колебаний рассмотрены в гл. 12.

В нашем случае роль «пружинки» играет связь между деформацией сдвига и деформацией сжатия (см. уравнение (11.38)). Устранить действие этой пружинки, как это делается в случае маятников при их отклонении в одну сторону на одно расстояние, не представляется возможным.

Нормальные частоты колебаний груза на винтовой пружине не равны между собой. В этом случае можно наблюдать каждое собственное колебание — это крутильные и вертикальные колебания. Частоты этих колебаний — нормальные частоты груза.

Не изменяя массы груза, можно изменить его момент инерции, а следовательно, и период крутильных колебаний. Приближая друг к другу периоды колебаний груза, можно наблюдать, как и в случае двух связанных маятников, появление биений, т. е. периодических изменений во времени амплитуды крутильных и вертикальных колебаний.

Частота биений  $\omega$  равна разности собственных частот, т. е. разности частот двух видов колебаний груза (крутильных  $\omega'_2$  и вертикальных  $\omega_1$ ):

$$\omega = \omega'_2 - \omega_1. \quad (7)$$

Для периода биений получим

$$\tau = \frac{T_1 - T'_2}{T'_2 - T_1}. \quad (8)$$

**Описание установки.** Пружина диаметром  $D$  (рис. 11.13, а) с грузом  $A$  на ее нижнем конце верхним концом прикреплена к консоли. Металлический груз имеет вид, изображенный на рис. 11.13, б. Это составной (для изменения массы) цилиндр  $A$  с двумя одина-

ковыми симметрично укрепленными на нем стержнями  $B$ . Для изменения момента инерции груза по резьбе стержней могут перемещаться одинаковые диски  $C$ .

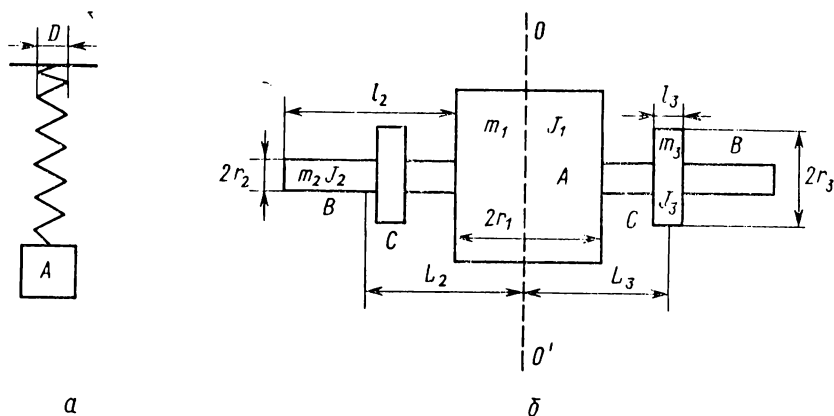


Рис. 11.13

Момент инерции груза относительно оси симметрии  $OO'$  цилиндра может быть получен как сумма моментов инерции пяти тел, а именно:  $J_1$  — цилиндра  $A$  массы  $m_1$  и радиуса  $r_1$ ,  $2J_2$  — двух стержней  $B$  массы  $m_2$  каждый, радиуса  $r_2$ , длины  $l_2$ ;  $2J_3$  — двух дисков  $C$  массы  $m_3$  каждый, радиуса  $r_3$ , толщины  $l_3$ . Вся масса  $m$  груза равна

$$m = m_1 + 2m_2 + 2m_3. \quad (9)$$

моменты инерции тел, составляющих груз, вычисляются по формулам

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2, \quad 2J_2 = 2m_2 L_2^2 + \frac{2m_2}{12} (l_2^2 + 3r_2^2),$$

$$2J_3 = 2m_3 \left\{ L_3^2 + \frac{1}{12} [l_3^2 + 3(r_3^2 + r_2^2)] \right\},$$

где  $L_2$  и  $L_3$  — расстояния от оси цилиндра  $A$  до центра масс соответственно стержня  $B$  и диска  $C$ . Это дает

$$J = J_1 + 2J_2 + 2J_3 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + 2m_2 \left[ L_2^2 + \frac{1}{12} (l_2^2 + 3r_2^2) \right] + \\ + \frac{1}{6} m_3 [l_3^2 + 3(r_3^2 + r_2^2)] + 2m_3 L_3^2. \quad (10)$$

Первые три члена этого выражения не зависят от положения дисков на стержнях и вычисляются заранее по данным, имеющимся на установке. Последний член, кроме массы диска  $m_3$ , опреде-



ляется расстоянием  $L_3$ . Эта величина измеряется при помощи штангенциркуля.

**Измерения.** 1. Коэффициент Пуассона определяется при условии, что возбуждение продольных колебаний вызывает минимальные крутильные колебания. Условия, при которых разность частот этих колебаний наибольшая, находится экспериментально. Очень осторожно, чтобы не сообщить системе других колебаний, создают небольшим опусканием груза вертикальные колебания. Пользуясь секундомером, измеряют время десяти полных колебаний и вычисляют период вертикальных колебаний  $T_1$ .

Не изменяя моменты инерции груза, осторожно, чтобы не сообщить других колебаний, небольшим поворотом груза вокруг вертикальной оси создают крутильные колебания. Из десяти полных колебаний вычисляют период крутильных колебаний  $T_2$ .

Периоды  $T_1$  и  $T_2$  необходимо вычислить не менее трех раз и пользоваться их средними арифметическими значениями. Измеряют величины  $L_3$  и  $D$ . По полученным данным, пользуясь формулами (6), (9) и (10), вычисляют величину коэффициента Пуассона.

2. Перемещением дисков на стержнях груза изменяют его момент инерции. Следует убедиться, что по мере уменьшения разности частот при возбуждении крутильных колебаний все более заметными становятся вертикальные колебания и биения. При достаточно отчетливом наблюдении биений приступают к проверке формулы (8).

Для этого при очень малых осторожно называемых крутильных колебаниях определяют их период  $T_2$ . Не изменяя момента инерции груза, осторожно создают вертикальные не очень малые колебания. Период биений  $\tau$  определяют, измеряя секундомером время между двумя последовательными остановками груза при его крутильных колебаниях. Измерения повторяют не менее трех раз и пользуются средним арифметическим значением. Зная величины  $T_1$ ,  $T_2$  и  $\tau$ , проверяют формулу (8). Не следует пользоваться очень близкими значениями величин  $T_1$  и  $T_2$  и сообщать пружине большие начальные отклонения.

*Литература:* [4] — § 86, 87, 133, 134; [2] — § 78—80.

### *Лабораторная работа 20*

#### **Определение времени соударения шаров и модуля Юнга**

**Теория.** Рассмотрим столкновение двух одинаковых абсолютно упругих шаров в системе центра масс. Пусть в начальный момент шары удерживаются отклоненными от положения равновесия в противоположные углы на угол  $\alpha$ , и поэтому каждый из них обладает потенциальной энергией

$$U = mgH(1 - \cos \alpha), \quad (1)$$

где  $\alpha = L/H$  — угол, образуемый нитью подвеса с вертикалью,  $L$  — расстояние по дуге, которое проходит шар до удара,  $H$  — длина нитей подвеса,  $m$  — масса шара,  $g$  — ускорение свободного падения. Если  $L/H \leq 0,1$ , то угол  $\alpha$  мал, и, используя разложение  $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ , формулу (1) можно записать в виде

$$U = \frac{mgL^2}{2H}. \quad (2)$$

Когда шары начнут двигаться, их потенциальная энергия переходит в кинетическую. В момент времени непосредственно перед столкновением шары соприкасаются друг с другом в точке  $O$ ,

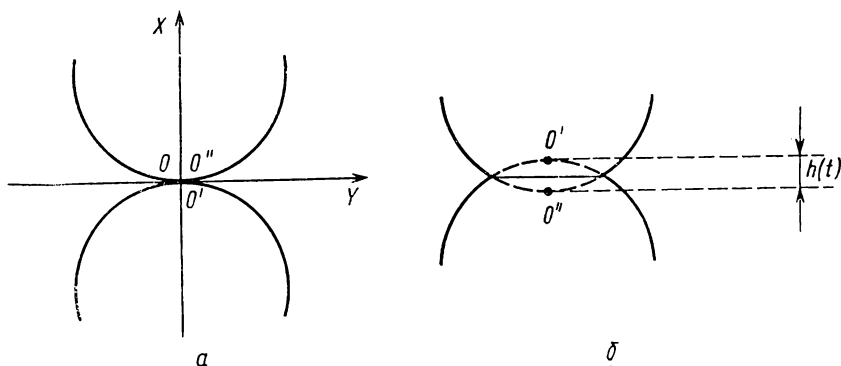


Рис. 11.14

лежащей на линии, которая проходит через центры обоих шаров (рис. 11.14, а). В этот момент каждый шар обладает кинетической энергией

$$W = \frac{mv_0^2}{2}, \quad (3)$$

где  $v_0$  — скорость шара перед соударением. Причем

$$U = W. \quad (4)$$

В процессе столкновения оба шара сдавливаются возникающими силами и сближаются, перемещаясь на некоторое расстояние  $h$  (рис. 11.14, б). При этом каждый из шаров, двигаясь со скоростью  $v$ , имеет кинетическую энергию  $mv^2/2$  и некоторую потенциальную энергию сжатия.

Скорость  $v$  можно выразить через относительную скорость шаров. Так как в системе центра масс из-за симметрии скорость шаров одинакова, то

$$v = \frac{\dot{h}}{2}. \quad (5)$$

Вывод выражения для потенциальной энергии сжатия  $U_{\text{сж}}$  для двух шаров довольно сложен (впервые этот вывод получен Г. Герцем и имеется в [2]), поэтому приведем окончательный результат

$$U_{\text{сж}} = kh^{5/2}, \quad (6)$$

где коэффициент

$$k = \frac{4}{15} \frac{E}{1 - \mu^2} \sqrt{\frac{R}{2}}, \quad (7)$$

$E$  — модуль Юнга,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $R$  — радиус шаров.

В течение столкновения полная энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергии. В силу закона сохранения энергии имеем

$$\frac{2mv^2}{2} + U_{\text{сж}} = 2W. \quad (8)$$

Используя формулы (3), (5) и (6), выражение (8) можно переписать в виде

$$2 \frac{m}{2} \left( \frac{\dot{h}}{2} \right)^2 + kh^{5/2} = \frac{2mv_0^2}{2}, \quad (9)$$

т. е. мы получили уравнение для  $h$ .

Когда кинетическая энергия шаров полностью перейдет в потенциальную энергию сжатия, центры шаров максимально сблизятся, переместившись в процессе столкновения на расстояние  $h_0$ .

Максимальное сближение шаров соответствует моменту, когда скорость каждого из них  $\dot{h}/2$  обращается в нуль. Используя это условие, из (9) находим

$$h_0 = \left( \frac{m}{k} \right)^{2/5} v_0^{4/5}. \quad (10)$$

Продолжительность столкновения  $\tau$  — это, например, время, в течение которого точка проходит в системе центра масс путь от нуля до  $h_0/2$  и обратно (см. рис. 11.14, б)

$$\tau = 2 \int_0^{h_0/2} v^{-1} dx. \quad (11)$$

Чтобы иметь возможность вычислить интеграл (11), перейдем к переменной  $h$ . Из рис. 11.14 очевидно, что

$$x = \frac{h}{2}. \quad (12)$$

Скорость  $v$ , используя соотношение (5) и уравнение (9), можно выразить через  $h$  следующим образом:

$$v = \sqrt{v_0^2 - \left( \frac{k}{m} \right) h^{5/2}}. \quad (13)$$

Интеграл (11) можно переписать в виде

$$\tau = \int_0^{h_0} \left[ v_0^2 - \left( \frac{k}{m} \right) h^{5/2} \right]^{-1/2} dh. \quad (14)$$

Если в (14) вынести  $v_0$  из-под корня, заменить  $h_0$  согласно (10) и перейти к новой переменной

$$z = \left( \frac{k}{mv_0^2} \right)^{2/5} h, \quad (15)$$

то интеграл (14) примет вид

$$\tau = \left( \frac{m^2}{k^2 v_0} \right)^{1/5} \int_0^1 [1 - z^{5/2}]^{-1/2} dz. \quad (16)$$

Используя таблицы или интегрируя численно, можно найти, что

$$\int_0^1 [1 - z^{5/2}]^{-1/2} dz = 1,47. \quad (17)$$

Таким образом для времени соударения имеем

$$\tau = 1,47 \left( \frac{m^2}{k^2 v_0} \right)^{1/5}. \quad (18)$$

Выражая массу шара через плотность  $\rho$  и объем и используя (2), (3), (4) и (7), получаем следующее выражение для времени соударения:

$$\tau = 1,47 R \left[ \left( 5\pi\rho \frac{(1-\mu^2)}{E} \right)^2 \cdot \left( \frac{4H}{gL^2} \right)^{1/2} \right]^{1/5}. \quad (19)$$

Разрешая (19) относительно  $E$ , находим для модуля Юнга следующее выражение:

$$E = 5\pi\rho (1-\mu^2) \left( \frac{4H}{L^2g} \right)^{1/4} \left( \frac{1,47R}{\tau} \right)^{5/2}. \quad (20)$$

Заметим также, что для заданных шаров и фиксированной длины нитей подвеса из (18)

$$\tau \sim v_0^{-1/5}, \quad (21)$$

а из формулы (19) вытекает следующее соотношение:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \left( \frac{L_1}{L_2} \right)^{1/5}, \quad (22)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  — длины дуг, которые проходит каждый из шаров перед столкновением продолжительностью  $\tau_1$  и  $\tau_2$  секунд соответственно.

В случае, когда от положения равновесия отклоняют только один шар (другой в это время покоится), выражение для закона сохранения энергии во время удара в движущейся со скоростью  $v_0/2$  системе координат (связанной с центром масс двух шаров) будет иметь следующий вид (ср. с формулой (8)):

$$2 \frac{mv^2}{2} + U_{сж} = 2 \frac{m (v_0/2)^2}{2}. \quad (23)$$

Это означает, что во всех следующих выражениях (9) — (21) необходимо сделать замену  $v_0 \rightarrow v_0/2$ ,  $L \rightarrow L/2$  и  $\alpha \rightarrow \alpha/2$ . Поэтому выражения для времени соударения шаров и модуля Юнга будут иметь вид

$$\tau = 1,47 R [100 \pi^2 (gH)^{-1/2} \rho^2 (1 - \mu^2) 2E^{-2}]^{1/5} \alpha^{-1/5}, \quad (24)$$

$$E = 10\pi\rho (1 - \mu^2) \left( \frac{1}{gH\alpha^2} \right)^{1/4} \left( \frac{1,47R}{\tau} \right)^{5/2} \quad (25)$$

**Описание установки.** Экспериментальная установка для первого варианта работы (рис. 11.15, а) включает в себя два сменных стальных или латунных шара, источник напряжения (ИН), осциллограф (О), частотомер (Ч). Порядок работы на установке рассмотрен в дополнительном описании.

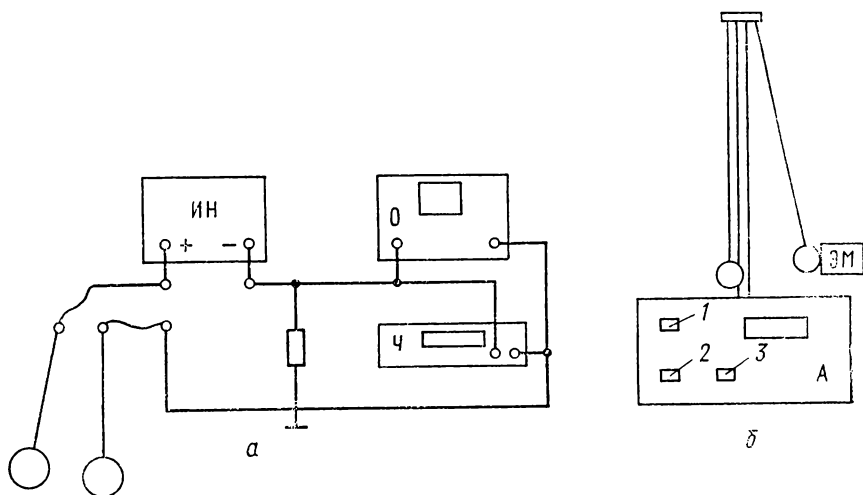


Рис. 11.15

Экспериментальная установка (вариант 2, рис. 11.15, б) включает в себя два сменных (стальных, латунных или из пластилина) шара, каждый из которых подвешен на двух металлических проводах (для того, чтобы избежать вращения шаров и обеспечить центральный удар), электромагнит (ЭМ) для удержания одного из шаров в отклоненном положении и электронный блок А, состоя-

щий из таймера и системы управления электромагнитом. Для включения электронного блока А необходимо нажать клавишу «сеть». Нажатием на клавишу «сброс» осуществляется обнуление табло таймера. В отжатом положении клавиши «пуск» замкнута цепь питания электромагнита, и он может удерживать один из шаров в отклоненном положении. При нажатии на клавишу «пуск» (клавиша фиксируется в утопленном положении) разрывается цепь питания электромагнита, шар освобождается, происходит соударение шаров. Шары включены в электрическую цепь. В момент удара происходит замыкание цепи. Таймер измеряет время протекания тока по данной цепи, т. е. длительность соударения, которая фиксируется на табло электронного блока. Повторное измерение времени таймером возможно только после того, как клавиша «пуск» будет отжата и вновь переведена в утопленное положение, т. е. при повторении эксперимента.

Все шары имеют проходящее через центр сквозное отверстие с резьбой и крепятся к подвесу путем наворачивания на вертикальный стержень, висящий на нитях подвеса. Нижний выступающий конец этого стержня служит для считывания по шкале прибора величины угла отклонения шара. Шары из латуни крепятся так, чтобы стальные цилиндрические вставки на них были обращены к электромагниту. Аналогичным образом крепится шар из пластилина (для изучения неупругого удара), который изготавливается с помощью специальной пресс-формы.

**Измерения.** Измерения начинают с проверки правильности подвеса шаров. В случае необходимости проводят регулировку длин нитей и расстояния между точками подвеса нитей обоих шаров. Далее измеряют диаметры шаров ( $2R$ ) с помощью штангенциркуля и расстояние  $H$  (высота подвеса шаров) с помощью линейки.

Отклоняя от положения равновесия один из шаров (второй при этом должен покоиться) на различные углы от  $1^\circ$  до  $15^\circ$ , снимают зависимость времени соударения шаров  $\tau$  от величины  $\alpha$ . Рекомендуются снимать указанную зависимость через  $1^\circ$  от  $\alpha=1^\circ$  до  $\alpha=15^\circ$ . Для каждого значения угла  $\alpha$  измерения времени соударения необходимо повторить  $3 \div 5$  раз, а затем взять среднее значение  $\tau$ . Результаты измерений заносят в таблицу, в которой для каждого значения  $\alpha$  указывают  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n$  ( $n=3 \div 5$ ),  $\bar{\tau}$ , а также  $\alpha^{-1/5}$  (здесь угол  $\alpha$  должен быть измерен в радианах).

На основании проделанных измерений строят график зависимости времени соударения шаров  $\bar{\tau}$  от величины  $\alpha^{-1/5}$ . Для этого сначала ставят точки  $\alpha^{-1/5}, \bar{\tau}$ , а затем, убедившись, что в пределах ошибок измерений полученные результаты можно аппроксимировать линейной зависимостью

$$\bar{\tau} = A \cdot x,$$

где  $x = \alpha^{-1/5}$ , проводят оптимальную (на глаз или методом наименьших квадратов) прямую. На основании этого графика определяют коэффициент углового наклона  $A$  и далее вычисляют мо-

дуль Юнга, задаваясь табличными значениями плотности  $\rho$  и коэффициента Пуассона  $\mu$  соответственно для стали или латуни:

$$E = 10\pi\rho(1-\mu^2) \left( \frac{1}{gH} \right)^{1/4} \left( \frac{1,47k}{A} \right)^{5/2}.$$

Сделав оценку величины ошибки коэффициента  $A$  по графику (или по формулам метода наименьших квадратов), производят оценку (с учетом ошибок измерения  $R$  и  $H$ ) величины ошибки полученного значения  $E$ .

Указанные измерения проводят для стальных и латунных шаров. По указанию преподавателя полный цикл измерений для одного из типов шаров может быть заменен измерением  $\tau$  для одного значения угла  $\alpha$ . В этом случае измерения необходимо повторить не менее 10 раз и вычислить среднее значение  $\bar{\tau}$ . На основании положения полученной точки на плоскости  $[x, \bar{\tau}]$  делают оценку отношения коэффициентов углового наклона для данного типа шаров ( $A_2$ ) и предыдущей пары шаров ( $A_1$ , из графика  $\tau=A_1x$ ) и затем вычисляют модуль Юнга по формуле

$$E_2 = \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^{5/2} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \left( \frac{1-\mu_2^2}{1-\mu_1^2} \right),$$

а также ошибку величины  $E_2$ . Кроме того, необходимо провести измерение и сопоставление углов отклонения шаров в результате упругого и неупругого ударов, в последнем случае используют шар из пластилина.

*Литература:* [4] — § 34, 35, 81, 87, 88; Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. Гл. 1, § 9.

**Введение.** Колебания широко распространены в природе и разносторонне используются в различных областях науки и техники. Особую роль различные колебательные процессы играют в физическом эксперименте, где на их основе созданы многочисленные динамические методы измерений, такие как резонансные, баллистические, квазистатические и другие, которые широко используются в механических, акустических, радиотехнических и оптических исследованиях. Несмотря на различную физическую природу этих разнообразных колебаний, все они обладают некоторой общей сущностью, которая в первую очередь определяется возможностью их единообразного математического описания. Это обстоятельство побудило выделить все колебательные процессы в отдельную главу, в которой мы будем рассматривать только механические колебания и волны, но основные понятия, методы их анализа и выводы будут полезны при изучении электрических и оптических явлений.

Все колебания могут быть разбиты на три группы: периодические, квазипериодические и непериодические. Периодическими колебаниями мы называем те процессы, которые повторяются во времени и описываются такой функцией времени, что  $f(t) = f(t + T)$ , где  $T$  — период данного колебания. Квазипериодическими колебаниями будем называть такие непериодические колебания, которые в течение достаточно длительного времени сохраняют основные характеристики процесса при медленном изменении, например, амплитуды колебания, т. е. слабозатухающие колебания.

Колебательный процесс в системе может возникнуть в двух случаях. В первом из них за счет внешней силы система выводится из состояния устойчивого равновесия, т. е. ей сообщается некоторое достаточное количество потенциальной или кинетической энергии, после чего внешние силы (за исключением сил трения, если они присутствуют) полностью отключаются. Тогда, за счет работы внутренних сил, образующихся в системе, происходит переход кинетической энергии в потенциальную и наоборот. В этом случае возникают колебания, которые называются *собственными* колебаниями системы. Другой случай реализуется, если на систему постоянно действует внешняя, зависящая от времени сила. В этом случае возникают так называемые *вынужденные* колеба-



ния системы. В обоих случаях в системе могут возникнуть достаточно сложные движения, описание которых потребует большого количества параметров (координат), определяющих число степеней свободы системы.

Рассмотрим первоначально наиболее простой случай, когда система обладает *одной степенью свободы*, т. е. ее движение можно описать одним независимым параметром (координатой).

Пусть рассматриваемый элемент системы имеет массу  $m$  и он может перемещаться только вдоль одной координаты  $x$ . Тогда уравнение движения этого элемента будет

$$m\ddot{x} = f_{\text{вн}} + f_{\text{тр}} + F, \quad (12.1)$$

где  $f_{\text{вн}}$  — внутренняя сила, возникающая при отклонении элемента системы из точки устойчивого равновесия, в которой  $x=0$ ,  $f_{\text{тр}}$  — сила трения, которой пока что пренебрежем (рассмотрим консервативную систему), и  $F$  — внешняя сила.

**П. 1.** Рассмотрим вначале собственные колебания в консервативной системе, т. е. будем считать  $F \equiv 0$  и  $f_{\text{тр}} = 0$ .

В общем случае  $f_{\text{вн}}$  может быть сколь угодно сложной функцией, но, рассматривая малые отклонения от положения равновесия, в большинстве физически интересных случаев ее можно разложить в ряд Тейлора

$$f_{\text{вн}}(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots \quad (12.2)$$

Так как  $x=0$  — точка устойчивого равновесия, то  $f_{\text{вн}}(0)=0$ . Если при заданном отклонении от  $x=0$  можно в разложении Тейлора пренебречь всеми членами кроме линейного по  $x$ , то получаем линейное дифференциальное уравнение (учитывая, что  $f'(0) < 0$ )

$$m\ddot{x} + f'(0)x = 0 \quad (12.3)$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \text{ где } \omega^2 = \frac{f'(0)}{m} = \frac{k}{m}, \quad (12.4)$$

которое называется уравнением гармонических колебаний. Общее решение уравнения (12.3) можно представить в виде гармонической функции

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (12.5)$$

период изменения которой будет

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (12.6)$$

Удобнее представить решение (12.5) в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t \right) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \varphi \sin \omega t + \sin \varphi \cos \omega t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (12.7)$$

где  $\sqrt{A^2+B^2}$  называется амплитудой колебания, а  $(\omega t + \varphi)$  — фазой колебания; ее значение при  $t=0$  — начальная фаза  $\varphi$ , определяемая из уравнения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}. \quad (12.8)$$

Амплитуда и начальная фаза собственных колебаний зависят от начальных условий. В общем случае, если при  $t=0$ ;  $x(0)=x_0$  и  $\dot{x}(0)=v_0$ , то из (12.5) получаем  $x_0=B$ . Дифференцируя (12.5) по времени, имеем

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t, \quad (12.9)$$

и тогда  $\dot{x}(0)=v_0=A\omega$ , откуда  $A=v_0/\omega$  и в общем виде вместо (12.7) получаем

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \sin \left( \omega t + \operatorname{arctg} \frac{x_0 \omega}{v_0} \right). \quad (12.10)$$

В частном случае, если при  $t=0$ ,  $x(0)=x_0$  и  $\dot{x}(0)=0$ , получаем

$$x(t) = x_0 \cos \omega t,$$

а в случае, если при  $t=0$ ,  $x(0)=0$ , а  $\dot{x}(0)=v_0$ ,

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Как видно, смещение  $x(t)$  изменяется по периодическому закону, так же как скорость  $\dot{x}(t)=v(t)$  и ускорение  $\ddot{x}(t)$ . При этом колебания скорости сдвинуты по фазе на  $\pi/2$  относительно колебаний смещения  $x(t)$  и имеют величину амплитуды  $\omega A_0$ . Колебания ускорения происходят в противофазе с колебаниями смещения и имеют амплитуду  $-\omega^2 A_0$  (рис. 12.1).

Для консервативной системы ( $f_{\text{тр}}=0$ ) полная механическая энергия сохраняется, причем происходит только периодический переход кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

Величина кинетической энергии в этом случае будет

$$E_{\text{кин}} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\omega^2 A_0^2}{2} \sin^2 \omega t, \quad (12.11)$$

потенциальной —

$$E_{\text{пот}} = \int_0^x f(x) dx = f'(0) \int_0^x x dx = \frac{m\omega^2 A_0^2}{2} \cos^2 \omega t, \quad (12.12)$$

так как согласно (12.4)  $f'(0)=m\omega^2$ .

Полная энергия не зависит от времени и равна

$$E_{\text{пол}} = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{m\omega^2 A_0^2}{2}. \quad (12.13)$$

Рассмотренные консервативные системы являются абстрактными, так как во всех реальных случаях существуют силы трения, работа которых приводит к диссипации энергии системы, т. е. рассеянию и уменьшению полной механической энергии системы за счет перехода части энергии в тепловую и другие виды энергии.

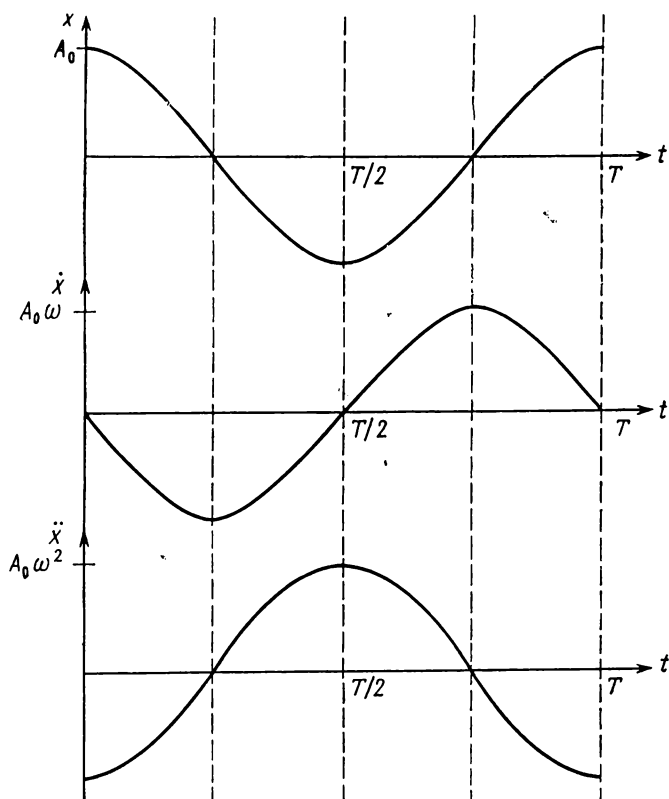


Рис. 12.1

**П. 2.** Рассмотрим основные закономерности собственных колебаний неконсервативной системы с одной степенью свободы. В этом случае в (12.1)  $f_{\text{тр}} \neq 0$ . Силы трения в механике могут иметь различную физическую природу (см. гл. X) и в зависимости от реальной физической ситуации описываются различными законами. Воспользуемся наиболее простым случаем «жидкого» или «вязкого» трения, когда сила трения направлена против направ-

ления вектора скорости, а ее величина пропорциональна первой степени величины скорости  $\dot{f}_{\text{тр}} = -h\dot{x}$ , где  $h$  — коэффициент трения. Тогда вместо (12.3) уравнение движения массы  $m$  запишется следующим образом:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0 \quad (12.14)$$

или

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (12.15)$$

где  $\delta = h/2m$  и  $\omega_0^2 = k/m$  (так же как в (12.4)).

Будем искать частное решение этого уравнения в комплексном виде как

$$\tilde{x}(t) = Ae^{i\alpha t}. \quad (12.16)$$

Подставляя (12.16) в (12.15), получаем

$$Ae^{i\alpha t} (-\alpha^2 + 2i\delta\alpha + \omega_0^2) = 0. \quad (12.17)$$

Так как  $Ae^{i\alpha t}$  не равно нулю, то

$$\alpha^2 - 2i\delta\alpha - \omega_0^2 = 0 \quad (12.18)$$

и его решение будет

$$\alpha = i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = i\delta \pm \Omega, \quad (12.19)$$

где  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ . Подставляя (12.19) в (12.16), получаем два частных решения:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= A_1 e^{-\delta t} \cdot e^{i\Omega t}, \\ \tilde{x}_2(t) &= A_2 e^{-\delta t} \cdot e^{-i\Omega t}. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Общее решение будет суммой частных решений (12.20):

$$\tilde{x}(t) = e^{-\delta t} (A_1 e^{i\Omega t} + A_2 e^{-i\Omega t}).$$

Так как  $x(t)$  — действительное число, то  $A_1$  и  $A_2$  должны быть комплексно сопряженными величинами. Примем их равными

$$A_1 = \frac{D}{2} e^{i\varphi}, \quad A_2 = \frac{D}{2} e^{-i\varphi}.$$

Тогда

$$x(t) = D e^{-\delta t} \left( \frac{e^{i(\Omega t + \varphi)} + e^{-i(\Omega t + \varphi)}}{2} \right) = D e^{-\delta t} \cos(\Omega t + \varphi), \quad (12.21)$$

где использованы формулы Эйлера для комплексных чисел

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \\ e^{-iz} &= \cos z - i \sin z. \end{aligned} \quad (12.22)$$

Полученные выражения (12.21) не являются периодическими. Однако условно говорят, что периодом таких колебаний является  $T=2\pi/\Omega$ , подразумевая под этим временной интервал между соседними моментами времени, когда смещение  $x(t)=0$ . Также условно амплитудой этих колебаний считают модуль максимального отклонения  $De^{-\delta t}$  в каждом «периоде» колебаний.

Все сказанное относится только к случаю не очень больших коэффициентов трения  $h$ , когда  $\Omega$  действительное число, т. е.  $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$  или  $\omega_0^2 > h/2m$ . В противном случае  $\Omega$  будет мнимой величиной и будет иметь место аperiodический режим, когда при отклонении системы от положения равновесия система будет стремиться к нему по экспоненциальному закону, не совершая колебаний (см. рис. 12.2).

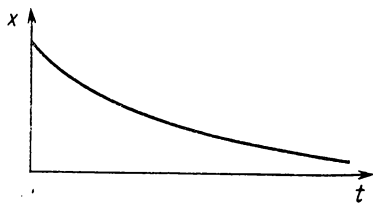


Рис. 12.2

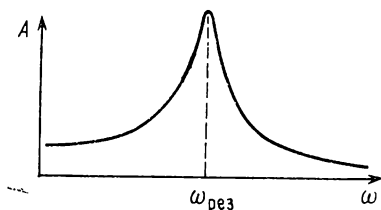


Рис. 12.3

Таким образом, величина затухания данного колебательного процесса при заданной основной динамической характеристике системы  $\omega_0$  будет определяться величиной  $\delta$ , которая получила название декремента затухания. Величина, обратная  $\delta$ , равная  $\tau=1/\delta$ , получила название времени затухания квазипериодического процесса и указывает интервал времени, за которое амплитуда колебания уменьшится в  $e$  раз.

Найдем изменение амплитуды колебания, которое произойдет за один период.

Пусть в момент времени  $t_1$  амплитуда будет  $A_1=A_0e^{-\delta t_1}$ , а в момент  $t_2=t_1+T$  соответственно  $A_2=A_0e^{-\delta t_2}=A_0e^{-\delta(t_1+T)}$ . Тогда отношение амплитуд  $A_1/A_2=e^{\delta T}$  и изменение амплитуды за период будет характеризоваться величиной  $\Theta=\delta T$ , получившей название логарифмического декремента затухания, причем  $\Theta=\ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$ .

В ряде случаев удобнее определить число колебаний  $N$ , которое совершит система до момента, когда амплитуда уменьшится в  $e$  раз. Легко показать, что отношение амплитуд, разделенных интервалом времени в  $N$  периодов, будет

$$\frac{A_1}{A_{N+1}} = e^{\delta NT} = e^{N\Theta},$$

откуда, помня определение  $\Theta$ , получаем

$$N = \frac{1}{\Theta}.$$

Приведем некоторые примеры порядка величин логарифмического декремента затухания  $\Theta$ .

Электрические контуры	$-(2 \div 5) \cdot 10^{-2}$
Камертоны	$-10^{-3}$
Кварцевые пластинки	$-10^{-4} \div 10^{-5}$

Так, для камертона с частотой колебаний  $\nu = \omega/2\pi = 50$  Гц время затухания, когда его амплитуда уменьшится в  $e$  раз ( $\sim 3$  раза), будет

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{T}{\theta} = \frac{2\pi}{\theta\omega} = \frac{1}{\theta\nu} = \frac{1}{50 \cdot 10^{-3}} \approx 20 \text{ с.}$$

В заключение рассмотрения собственных колебаний систем с одной степенью свободы приведем вывод общей формулы колебаний в зависимости от начальных условий.

Из (12.21) получаем

$$\dot{x}(t) = -De^{-\delta t} [\delta \cos(\Omega t + \varphi) + \Omega \sin(\Omega t + \varphi)]. \quad (12.23)$$

Тогда, если  $t=0$ ,  $x(0)=x_0$  и  $\dot{x}(0)=\dot{x}_0=v_0$ , из (12.21) и (12.23) получаем

$$x_0 = D \cos \varphi, \quad (12.24)$$

$$v_0 = -D [\delta \cos \varphi + \Omega \sin \varphi]. \quad (12.25)$$

Решая (12.24) и (12.25) относительно  $D$  и  $\varphi$ , получаем

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0\delta + v_0)^2}{\omega_0^2 - \delta^2}} e^{-\delta t} \cos [\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi], \quad (12.26)$$

где  $\varphi = \arctg \frac{x_0\delta + v_0}{x_0 \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ .

Отсюда легко получить частные случаи, как это сделано для формулы (12.10).

**П. 3.** Рассмотрим теперь колебания в системе с одной степенью свободы, которые возникают под действием внешней периодической силы  $F(t) \neq 0$ .

Если мы рассматриваем линейную систему, т. е. в (12.2) ограничиваемся только линейным по  $x$  членом, то задача значительно упрощается. Дело в том, что в указанных системах действует *принцип суперпозиции*, согласно которому колебания, вызываемые различными внешними силами, независимы. Другими словами, если внешняя сила  $F_1(t)$  вызывает колебание  $x_1(t)$ , а внешняя сила  $F_2(t)$  вызывает колебание  $x_2(t)$ , то действие силы  $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$  возбудит колебание  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ . С другой стороны, известно, что произвольную периодическую силу  $F(t)$  можно разложить в ряд Фурье, т. е. представить ее в виде суммы сил, изменяющихся во времени по гармоническому (синусоидальному) закону. Тогда в силу указанного выше принципа суперпозиции для анализа колебаний, возникших в системе под действием произвольной внешней силы  $F(t)$ , достаточно знать поведение

этой системы под действием гармонической силы определенной частоты  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ . В этом случае вместо (12.15) уравнение движения линейного осциллятора запишется в виде:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (12.27)$$

Из математики известно, что общее решение этого неоднородного дифференциального уравнения можно представить в виде суммы частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения ( $F_0 = 0$ ), т. е. общее решение будет (см. (12.21) и (12.26))

$$x(t) = x_1(t) + \bar{D}e^{-\delta t} \cos(\Omega t + \varphi). \quad (12.28)$$

Здесь  $x_1(t)$  соответствует вынужденным колебаниям, а второй член — затухающим собственным колебаниям.

Как видно из (12.28),  $x(t)$  представляет собой сложную функцию времени, определяемую как амплитудой и частотой вынуждающей силы  $F_0$ ,  $\omega$ , так и динамическими характеристиками системы  $\omega_0$  и  $\delta$  ( $\Omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ ) и начальными условиями  $x(0)$  и  $v_0$  (см. (12.26)). Однако такой сложный вид колебаний сохраняется в системе только в ограниченный интервал времени, который получил название переходного режима, ибо вследствие наличия затухания  $e^{-\delta t}$  собственные колебания спустя некоторое время, равное  $(4 \div 5) \tau$ , затухнут, их амплитуда будет пренебрежимо мала и в системе реализуется режим установившихся вынужденных колебаний  $x_1(t)$ .

Рассмотрим подробнее именно этот режим. С этой целью перепишем уравнение (12.27) в комплексном виде:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}, \quad (12.29)$$

а его частное решение будем искать в виде

$$\tilde{x}(t) = A e^{i\alpha t}. \quad (12.30)$$

Реальная часть этого решения будет решением уравнения (12.27). Подставляя (12.30) в (12.29), получаем

$$A e^{i\alpha t} (-\alpha^2 + 2i\delta\alpha + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}.$$

Из условия стационарности решения (независимости его от времени) следует, что  $\alpha \equiv \omega$ , откуда

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}. \quad (12.31)$$

$A$  есть комплексное число, которое удобно представить в экспоненциальном виде  $A = x + iY = A_0 e^{i\varphi}$ . Тогда модуль  $A$  будет  $A_0 = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , а его фаза  $\tan \varphi = Y/X$ . Из (12.31) получаем

$$A_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad (12.32)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (12.33)$$

Следовательно, решение (12.30) будет иметь вид

$$\tilde{x}(t) = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad (12.34)$$

а его реальная часть

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} A_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = A_0 \cos(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \end{aligned} \quad (12.35)$$

**П. 4.** Из (12.35) видно, что и амплитуда установившихся вынужденных колебаний и их фаза зависят как от характеристик вынуждающей силы, так и от параметров системы. Проанализируем первоначально зависимость амплитуды установившихся вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы  $\omega$  — явление резонанса. Эта так называемая амплитудно-частотная характеристика определяется выражением (12.32) и изображена на рис. 12.3. Для нахождения резонансной частоты, при которой указанная кривая достигает максимума, необходимо, как известно, первую производную по частоте от (12.32) приравнять нулю. В результате получим

$$\omega_{\text{рез}}^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2, \quad (12.36)$$

или, учитывая, что наше рассмотрение верно только при достаточно малом затухании (см. п. 2.), когда  $\omega_0^2 \gg \delta^2$ , в дальнейшем будем считать  $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$ .

При анализе резонансных кривых в системах с различным затуханием наряду с декрементом затухания  $\delta$ , логарифмическим декрементом затухания  $\Theta$  широко пользуются величиной, которая называется добротностью системы  $Q$ . Она определяется как отношение амплитуды смещения при резонансе ( $\omega = \omega_0$ )  $A_{\text{рез}}$  к амплитуде смещения  $A_{\text{ст}}$ , когда  $\omega \rightarrow 0$ . Из (12.32) получаем безразмерный параметр

$$Q = \frac{A_{\text{рез}}}{A_{\text{ст}}} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{2\pi}{2\delta T} = \frac{\pi}{\theta}. \quad (12.37)$$

Выразим резонансную кривую (12.32) через безразмерные параметры  $Q$  и  $\gamma = \omega/\omega_0$ . С этой целью вынесем из-под квадратного корня  $\omega_0^4$  и, учитывая, что  $F_0/m\omega_0^2 = F_0/f'(0) = F_0/k$ , получаем

$$A_0 = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\delta^2\omega^2}{\omega_0^4}}} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}}.$$



Вводя безразмерную относительную амплитуду смещения  $u = A_0/F_0/k = A_0 k/F_0$ , получаем

$$u = \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}}. \quad (12.38)$$

Графики зависимости относительных амплитуд смещения  $u$  от  $\gamma$  для различных  $Q$  приведены на рис. 12.4.

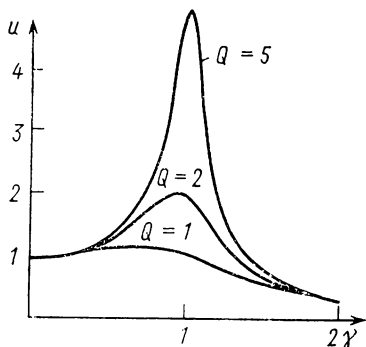


Рис. 12.4

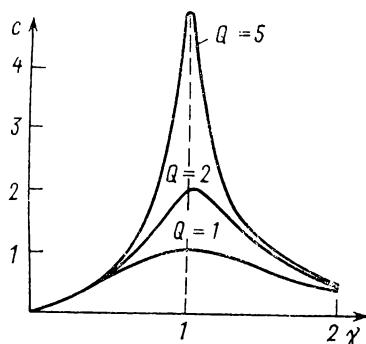


Рис. 12.5

Наряду со смещением важную роль играет зависимость квадрата смещения от частоты или  $\gamma$ , имеющая смысл энергии осциллятора. Считая вблизи резонанса  $\omega \approx \omega_0$  и  $\omega_0 - \omega = \Delta'\omega \ll \omega_0$ , из (12.32) получаем

$$\begin{aligned} A_0^2 &= \frac{F_0^2}{m^2} \frac{1}{\Delta'\omega^2 (\omega_0 + \omega)^2 + 4\delta^2 (\omega_0 + \Delta'\omega)^2} \approx \\ &\approx \frac{F_0^2}{m^2} \frac{1}{4(\Delta'\omega)^2 \omega_0^2 + 4\delta^2 \omega_0^2} = \frac{F_0^2}{m^2} \frac{1}{4\omega_0^2 [(\Delta'\omega)^2 + \delta^2]}. \end{aligned} \quad (12.39)$$

Так как при резонансе  $A_{0\text{рез}}^2 = (F_0^2/m^2) (1/4\delta^2 \omega_0^2)$ , то на половине высоты резонансной кривой  $1/2 A_{0\text{рез}}^2 = (F_0^2/m^2) (1/8\delta^2 \omega_0^2)$ . Приравняв полученное выражение (12.39), получаем  $\Delta'\omega = \delta$  или полуширину резонансной кривой  $\Delta\omega = 2\Delta'\omega = 2\delta$ , а на безразмерной резонансной кривой (12.38)

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{2\delta}{\omega_0} = \frac{1}{Q}, \quad Q = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad (12.40)$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — два значения (слева и справа от резонанса), соответствующие значению  $1/2 u^2$ .

Наряду с резонансной кривой смещения  $u$  важно рассмотреть резонансные кривые для скорости и ускорения.

Для гармонической внешней силы частное решение уравнения движения будет  $\tilde{x} = \tilde{A}e^{i\omega t}$  (см. (12.30)). Дифференцируя это решение по времени, получаем

$$\dot{\tilde{x}} = i\omega \tilde{A}e^{i\omega t} = \tilde{v}_0 e^{i\omega t}, \quad (12.41)$$

$$\ddot{\tilde{x}} = -\omega^2 \tilde{A}e^{i\omega t} = \tilde{a}e^{i\omega t}. \quad (12.42)$$

Далее, действуя так же, как при получении выражения (12.32), и вводя безразмерные значения скорости  $c = v_0 \sqrt{km}/F_0$  и ускорения  $\omega = am/F_0$ , получаем в безразмерных координатах следующие резонансные кривые, изображенные для разных  $Q$  на рис. 12.5 и рис. 12.6 соответственно:

$$c = \frac{Q\gamma}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 Q^2 + \gamma^2}}, \quad (12.43)$$

$$\omega = \frac{Q\gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 Q^2 + \gamma^2}}. \quad (12.44)$$

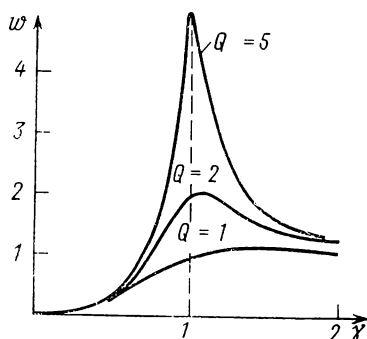


Рис. 12.6

В заключение п. 4 рассмотрим фазово-частотную характеристику установившихся вынужденных колебаний, т. е. зависимость разности фаз между смещением в возникающих колебаниях и вынуждающей силой. Эта зависимость получена в (12.32). Приведем ее к безразмерным параметрам

$$\varphi = \arctg \left( -\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \arctg \left( \frac{\gamma}{Q(\gamma^2 - 1)} \right). \quad (12.45)$$

Эта зависимость представлена для различных  $Q$  на рис. 12.7. При  $Q \rightarrow \infty$  (отсутствие затухания) при  $\omega = \omega_{\text{рез}}$  ( $\gamma = 1$ ) происходит скачок фазы на  $\pi$ . При всех конечных  $Q$  (наличие затухания) при резонансе  $\gamma = 1$  сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой  $-\pi/2 = -90^\circ$ . Смещение отстает по фазе на  $\pi/2$  от силы. Используя (12.41) и (12.42), легко показать, что при любом конеч-

ном  $Q$  скорость опережает внешнюю силу по фазе на  $\pi/2 - \varphi$ , а ускорение опережает внешнюю силу по фазе на  $\pi - \varphi$ . При резонансе  $\gamma = 1$  скорость совпадает по фазе с внешней силой.

*Литература к главе 12:* [1] — гл. XIII; [2] — гл. VI; [3] — гл. XVII; [4] — гл. XIV; [5] — гл. I, III.

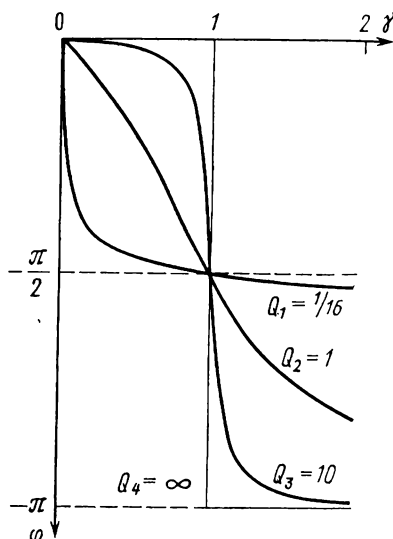


Рис. 12.7

## Лабораторная работа 21

### Собственные колебания пружинного маятника

**Введение.** Рассмотрим пружинный маятник (рис. 12.8), состоящий из тела массы  $m$  и легкой, имеющей достаточно большое число витков (см. лабораторную работу 19) пружины. В общем случае в зависимости от способа возбуждения (начальных условий) указанный пружинный маятник может совершать достаточно сложные колебательные движения в пространстве. Однако если оттянуть тело маятника  $m$  строго вертикально вниз на небольшое расстояние и отпустить маятник, то он начнет совершать колебания только вдоль вертикальной линии. В этом случае для описания указанных колебаний требуется только один параметр (координата), описывающий положение центра масс маятника по вертикальной оси. Таким образом реализуется случай колебания с одной степенью свободы. Начало координат на вертикальной оси  $X$  выберем таким образом, что при  $x = 0$  масса  $m$  находилась

в состоянии равновесия. При этом сила тяжести  $mg$  будет скомпенсирована некоторым начальным растяжением пружины и в дальнейшем рассмотрении участвовать не будет.

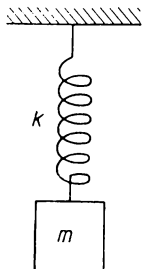


Рис. 12.8

В данной лабораторной работе исследуются собственные колебания пружинного маятника, т. е. те колебания, которые возникают в системе после снятия воздействия внешней силы, выведшей маятник из состояния равновесия. При отклонении тела из точки равновесия будет возникать внутренняя возвращающая сила упругости  $f_{\text{вн}}$ , направленная к точке равновесия. Если величина деформации (отклонения) маятника мала, т. е. много меньше первоначальной длины маятника, то можно воспользоваться законом Гука, согласно которому

$$f_{\text{вн}} = -kx, \quad (1)$$

где  $k$  — коэффициент жесткости пружины, зависящий от ее геометрических размеров и материала, из которого она изготовлена. Кроме возвращающей силы  $f_{\text{вн}}$  на маятник будет действовать сила трения  $f_{\text{тр}}$ . В данной конструкции отсутствует сила сухого трения. Однако маятник будет испытывать сопротивление воздуха, т. е. силу «вязкого» трения. При малых амплитудах колебаний скорость движения массы маятника будет мала, и тогда можно воспользоваться линейным приближением, считая

$$f_{\text{тр}} = -h\dot{x} = h\nu, \quad (2)$$

где  $h$  — коэффициент трения.

Используя выражения (1) и (2), можно записать уравнение

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}, \quad (3)$$

которое совпадает с выражением (12.14) для затухающего гармонического осциллятора.

Таким образом, рассмотренный пружинный маятник можно рассматривать как затухающий гармонический механический осциллятор, теория колебания которого рассмотрена во введении (П.1—П.3).

## Описание установки

Установка для изучения собственных и вынужденных колебаний состоит из следующих частей\* (см. рис. 12.9): пружинного маятника, состоящего из пружины  $k$ , двух масс  $m_1$  и  $m_0$ , катушки возбуждения  $L_{\text{в}}$  и измерительной катушки  $L_{\text{из}}$ .

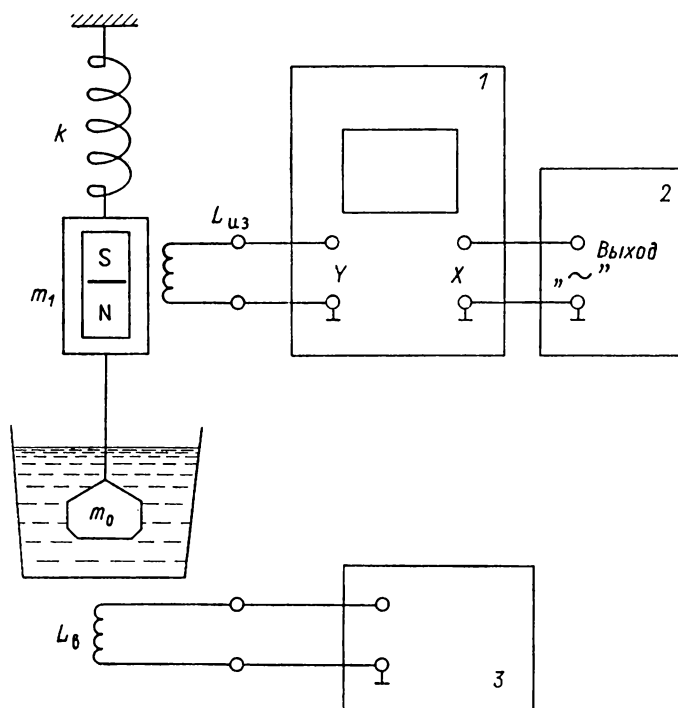


Рис. 12.9

Одна из масс маятника  $m_1$  выполнена в виде полого цилиндра, внутри которого находится постоянный магнит. Другая масса выполнена из железа и может быть помещена в стакан, наполненный водой. При движении груза в воде возникает вязкое трение, которое при небольшой амплитуде колебаний пропорционально скорости. Величина силы трения зависит от формы тела.

При наличии колебаний массы  $m_1$ , содержащей магнит, в измерительной катушке  $L_{\text{из}}$  возникает электродвижущая сила индукции, которая определяется скоростью изменения магнитного потока и числом витков измерительной катушки. Как известно,

---

\* В создании установки принимали участие выпускники факультета Т. А. Крамаренко и В. А. Молодцов, которым авторы выражают благодарность.

величина магнитного потока  $\Phi$  равна произведению магнитной индукции  $B$  на среднюю площадь измерительной катушки  $S$ .

Индукция магнитного поля  $B$ , создаваемая магнитом в измерительной катушке, плавно уменьшается с увеличением расстояния между магнитом и катушкой.

Если колебания маятника малы по сравнению с расстоянием между магнитом и катушкой, то изменение индукции  $dB$  можно написать в виде  $dB/dx|_{\text{ср}} \cdot dx$ , где  $dB/dx|_{\text{ср}}$  — среднее значение производной. Используя выражение для ЭДС электромагнитной индукции, можно написать

$$\mathcal{E} = n \frac{d\Phi}{dt} = nS \frac{dB}{dt} = nS \frac{dB}{dx} \bigg|_{\text{ср}} \frac{dx}{dt} = nS \frac{dB}{dx} \bigg|_{\text{ср}} v,$$

где  $v$  — скорость движения маятника. Отсюда видно, что ЭДС  $E$ , возникающая на измерительной катушке, пропорциональна скорости движения маятника  $v$ .

При изучении собственных колебаний для задания начального отклонения на катушку возбуждения подается постоянное напряжение (тумблер «вкл» на источнике напряжения) и груз притягивается к катушке. При выключении напряжения исчезает сила притяжения между грузом и катушкой возбуждения и в системе возникают собственные затухающие колебания.

Для выполнения лабораторной работы студенту предоставляются две различные пружины и два тела маятника с известными массами. По указанию преподавателя исследованию подлежат все четыре пружинных маятника, образованных всеми комбинациями указанных пружин и масс, или часть из них.

Первое упражнение заключается в определении коэффициентов жесткости предоставленных пружин статическим методом и вычисления на основе этих измерений собственных частот исследуемых маятников. Измерения проводятся на специальном стенде путем определения удлинения под действием известных по массе грузов. Коэффициент жесткости находится по формуле

$$k = \frac{M_i g}{\Delta x_i}.$$

При расчете собственных частот исследуемых маятников необходимо учитывать массу  $m_1$  магнита, величина которой указана на установке

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_0 + m_1}}.$$

Второе упражнение заключается в измерении собственных частот исследуемых маятников динамическим методом.

Для выполнения этого упражнения выбранный маятник, т. е. пружину, массу с магнитом  $m_1$  и тело маятника  $m_0$ , подвешивают на установку (см. рис. 12.9).

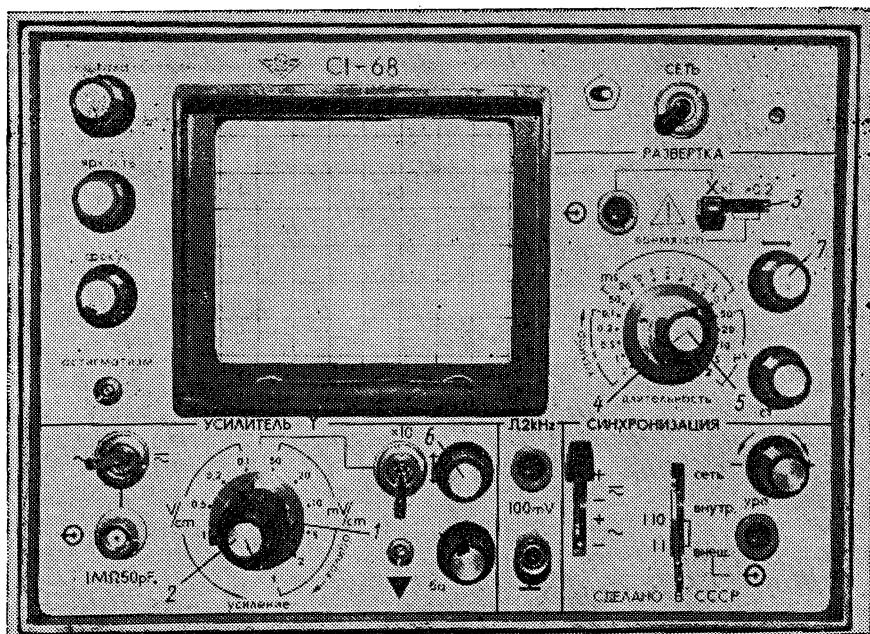


Рис. 12.10

Тремя установочными винтами корпуса установки добиваются того, чтобы масса  $m_1$  располагалась строго по оси измерительной катушки так, чтобы при своем колебании она не касалась ее края. На возбуждающую катушку устанавливается пустой стакан или пластмассовая пластина, равная по толщине дну стакана. Находящимся в верхней части установки регулировочным винтом устанавливают зазор между пластинкой и массой  $m_0$ , равный  $\approx 1$  см. После этого необходимо подключить к установке осциллограф 1, генератор 2 и источник 3 согласно схеме, изображенной на рис. 12.9. Указанные приборы включаются тумблерами «сеть 220 В».

Первоначально наблюдают вид собственных колебаний маятника на экране осциллографа (рис. 12.10). Для этого устанавливают чувствительность осциллографа (канал Y) 1 на шкалу  $1 \div 5$  мВ/см (см. рис. 12.9), а ручку плавной регулировки чувствительности устанавливают в крайнее (по часовой стрелке) положение. Переключатель развертки 3 устанавливается в положение « $\times 1$ », а скорость развертки 4 — на уровне  $0,5 \div 1$  с/дел. Ручку плавной регулировки развертки 5 установить в крайнее (по часовой стрелке) положение. Положение луча на экране необходимо отрегулировать ручками «вверх-вниз» (6) и «влево-вправо» (7). Для возбуждения колебаний включают тумблер сеть источника питания возбуждающей катушки и через несколько секунд вы-

ключают его. Указанными регулировками добиваются наиболее полной картины колебаний на экране осциллографа.

Далее приступают к измерению частоты собственных колебаний маятника. Для этого используется метод фигур Лисажу [3]. Суть этого метода заключается в том, что если точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, то она на плоскости будет описывать траекторию, вид которой определяется частотами и начальными фазами указанных колебаний. В общем случае произвольных частот и фаз наблюдаемая фигура будет достаточно сложной и будет изменяться со временем. Однако если частоты обоих колебаний кратны друг другу, то наблюдаемая траектория представляет собой замкнутую фигуру, вписанную в прямоугольник, причем по числу касаний к сторонам прямоугольника можно определить, во сколько раз одна частота больше другой.

Наиболее простой вид фигура Лисажу приобретает в том случае, когда частоты обоих колебаний равны между собой.

Действительно, пусть

$$S_x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$S_y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Исключая время  $t$  из этих двух уравнений, путем несложных тригонометрических преобразований можно показать, что уравнение траектории будет

$$\frac{S_x^2}{A_1^2} = \frac{S_y^2}{A_2^2} = \frac{2S_x S_y}{A_1 A_2} \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Это уравнение второго порядка является уравнением эллипса, форма которого определяется разностью начальных фаз колебаний  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . В частности, если  $\Delta\varphi = 0$ , то эллипс вырождается в прямую, расположенную под углом к осям координат.

Для реализации метода фигур Лисажу необходимо отключить развертку осциллографа, для чего переключатель развертки переводится из положения «X1» в положение «X». При этом на горизонтально отклоняющие пластинки подается переменный сигнал с измерительной катушки. После регулирования положения луча ручкой 6 на экране осциллографа должно появиться двумерное изображение фигуры Лисажу. Плавное изменение частоты генератора, добиваются того, чтобы фигура Лисажу приняла форму эллипса. В этом случае частота собственных колебаний маятника будет совпадать с частотой генератора, величину которой определяют по отсчету лимба на генераторе.

Третье упражнение посвящено измерению времени затухания и логарифмического декремента затухания  $\Theta$  при движении тела маятника в вязкой среде. При переходе к указанным измерениям на возбуждающую катушку устанавливается стакан, наполненный водой, и в нее погружается груз маятника  $m_0$ . Измерение величины  $\tau$  и  $\Theta$  можно проводить двумя способами.



В первом способе включают развертку осциллографа, переводя переключатель развертки в положение «X1», а переключатель скорости развертки устанавливают в положение 2 с/дел. Отрегулировав положение луча на экране осциллографа с помощью ручки 7, включают источник напряжения, питающий катушку возбуждения. Дождавшись начала развертки, возбуждают колебания маятника, выключив источник питания. Измерив число делений на экране осциллографа вдоль горизонтальной оси, в пределах которых амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз ( $\sim 2,7$  раза), и зная скорость развертки, определяют величину  $\tau$  и затем рассчитывают (см. введение) величину логарифмического декремента

$$\theta = \frac{1}{\tau \nu_0}.$$

При использовании второго способа переключатель развертки устанавливают в положение «X», а выходную амплитуду генератора, который подсоединен к осциллографу, сильно уменьшают, включая на генераторе кнопку ослабления в 60 дБ. Возбудив колебания маятника, считают число колебаний  $N$ , при котором амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Тогда величина логарифмического декремента затухания будет

$$\theta = \frac{1}{N}.$$

Измерение логарифмического декремента затухания (как первым, так и вторым способом) рекомендуется повторить несколько раз и вычислить среднее значение  $\Theta$ .

На основании полученных значений логарифмического декремента  $\Theta$  вычисляются значения добротности

$$Q = \frac{\pi}{\theta}.$$

Отчет по задаче должен содержать таблицу, в которой для каждого из возможных сочетаний пружин и грузов (по указанию преподавателя число используемых комбинаций может быть уменьшено до трех или даже до двух) приводятся два значения частоты  $\nu_0$ : вычисленное на основании статических измерений и определенное динамическим способом, постоянной времени  $\tau$ , логарифмического декремента затухания  $\Theta$ , добротности  $Q$ .

*Литература:* [1] — гл. 13, § 50—52; [2] — гл. VI, § 40; [3] — гл. XVII, § 135—138; [5] — гл. 1, § 1—6.

# Вынужденные колебания пружинного маятника и явление резонанса

**Описание установки.** Исследование вынужденных колебаний пружинного маятника проводится на специальной установке, схема которой приведена на рис. 12.11. Исследуемый пружинный

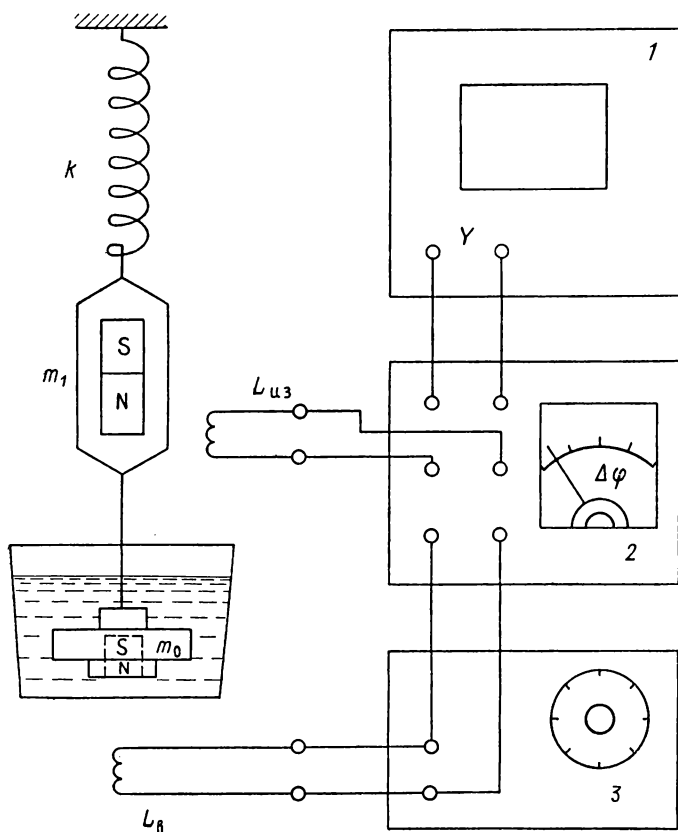


Рис. 12.11

маятник состоит из достаточно длинной стальной пружины с большим количеством витков (см. лабораторную работу 21) с коэффициентом жесткости  $k$ ; массы  $m_1$ , которая представляет собой полый цилиндр из диамагнитного материала, внутри которого размещен постоянный магнит; тела маятника массы  $m_0$ , которое представляет собой шайбу с отверстиями, в центре которой также вмонтирован постоянный магнит.

При произвольном отклонении от состояния равновесия масс  $m_1$  и  $m_0$  маятник может совершать достаточно сложные колебательные движения в пространстве. Однако, если оттянуть массу  $m_0$  строго вниз по вертикальной оси  $X$  на небольшой отрезок и отпустить, маятник будет совершать малые колебания только вдоль оси  $X$  и для описания этих колебаний потребуется только один параметр, т. е. реализуется случай колебательной системы с одной степенью свободы. Начало координат на вертикальной оси  $X$  выбирается при этом таким образом, что при  $x=0$  маятник находится в равновесии. При этом сила тяжести  $(m_1+m_0)g$  будет скомпенсирована некоторым начальным растяжением пружины и в дальнейшем рассмотрении участвовать не будет.

Для реализации внешней гармонической силы под телом маятника  $m_0$  располагается возбуждающая катушка  $L_b$ , на которую от генератора подается некоторое гармоническое напряжение. В результате этого вокруг катушки образуется переменное во времени и неоднородное по пространству магнитное поле, которое воздействует на постоянный магнит, вмонтированный в тело маятника  $m_0$ , и создает внешнюю периодическую силу. Для увеличения затухания возникающих колебаний тело маятника, выполненное в виде шайбы с просверленными отверстиями, помещается в стакан с водой. При относительно небольших амплитудах колебания маятника возникающая сила трения может быть с достаточной точностью аппроксимирована линейным законом, т. е.

$$f_{\text{тр}} = -h\dot{x} = -h\nu.$$

При колебании маятника, а следовательно, и постоянного магнита, вмонтированного в массу  $m_1$ , в измерительной катушке  $L_{из}$ , расположенной под этим грузом, возникает переменная ЭДС

$$\mathcal{E} = n \frac{d\Phi}{dt} = nS \frac{dB}{dt} = nS \left. \frac{dB}{dx} \right|_{cp} \frac{dx}{dt} = L\dot{x} = L\nu$$

(см. лабораторную работу 21), где  $n$  и  $S$  — число и площадь витков измерительной катушки,  $dB/dx|_{cp}$  — среднее значение пространственной производной индукции,  $B$ ,  $L$  — коэффициент пропорциональности. Отсюда видно, что при колебании маятника на измерительной катушке возникает напряжение, пропорциональное скорости движения маятника  $\nu$ .

Это напряжение подается на  $Y$  — вход осциллографа 1 и на измеритель разности фаз 2.

Таким образом можно фиксировать амплитуду скорости колебаний и разность фаз по отношению к возбуждающей силе при различных частотах последней, задаваемых генератором 3.

Теория вынужденных колебаний и явления резонанса для систем с одной степенью свободы кратко изложена во введении к гл. 12.

**Измерения.** Для исследования маятников с различными динамическими характеристиками используются две-три различные

пружины. Так же, как и в предыдущей работе, предварительно статистическим методом определяются коэффициенты жесткости этих пружин. На специальном стенде измеряется их удлинение  $\Delta x_i$  при подвешивании различных грузов с известной массой  $M_i$ . (Величина грузов подобрана таким образом, чтобы оставаться в пределах действия закона Гука.) Для каждой пружины

$$k = \frac{M_i g}{\Delta x_i}.$$

На основании полученных результатов вычисляют значения частот собственных колебаний маятника при использовании каждой пружины по формуле

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{m_0 + m_1}}.$$

Значения  $m_0$  и  $m_1$  указаны на установке.

Далее необходимо подвесить пружину, массы  $m_1$  и  $m_0$  в установку, на катушку возбуждения установить стакан с водой и погрузить в воду груз маятника  $m_0$ . После этого необходимо отрегулировать зазор между грузом и дном стакана до величины  $\sim 1$  см с помощью регулировочного винта, расположенного в верхней части установки.

При помощи трех регулировочных винтов, на которых установлен каркас установки маятника, добиваются такого расположения каркаса, чтобы вертикальная нить проходила точно по оси измерительной катушки и при колебаниях маятника масса  $m_1$  не касалась края катушки.

Затем к установке подключают согласно схеме на рис. 12.10 осциллограф 1, измеритель разности фаз 2 и генератор 3 и включают их при помощи тумблера «сеть 220 В».

Первое упражнение состоит в определении резонансной частоты маятника. Установив частоты генератора примерно равной вычисленному значению собственной частоты маятника и затем изменяя ее в небольших пределах, находят значение частоты  $\nu_{рез}$ , при котором амплитуда вынужденных колебаний, наблюдаемых на экране осциллографа, максимальна. После этого приступают ко второму упражнению — снятию зависимостей амплитуды колебаний, наблюдаемых на экране осциллографа, и разности фаз  $\varphi$  от частоты силы, действующей на маятник. Для получения величин разности фаз  $\varphi$  вынуждающей силы и смещения маятника необходимо к показаниям стрелочного прибора измерителя разности фаз прибавлять величину  $\Delta\varphi = 90^\circ$ , т. е. делению  $-90^\circ$  на шкале прибора соответствует  $\varphi = 0^\circ$ , делению  $0^\circ$  соответствует  $\varphi = 90^\circ$  и т. д. Рекомендуется снимать значения амплитуды колебаний и разности фаз  $\varphi$  через каждые полделения частотной шкалы генератора, т. е. через  $0,025 \div 0,05$  Гц, вблизи резонансной частоты и через одно деление шкалы генератора, когда амплитуда колебаний уменьшится примерно в 5 раз. Достаточно дойти до

значения частоты, при котором амплитуда колебаний будет составлять  $5 \div 10\%$  от амплитуды колебаний при резонансе. На основании этих данных строят графики зависимости амплитуды колебаний, наблюдаемых на экране осциллографа, и разности фаз  $\varphi$  от частоты вынуждающей силы. Поскольку ЭДС, возникающая в измерительной катушке, пропорциональна скорости движения магнита, первый график фактически представляет собой зависимость амплитуды скорости движения маятника от частоты вынуждающей силы. Измерив ширину резонансной кривой на уровне значения амплитуды, равного  $1/\sqrt{2} \sim 0,7$  от значения амплитуды при резонансе, получают оценку (справедливую при малом затухании, когда  $\Delta\nu \ll \nu_{\text{рез}}$ ) добротности

$$Q = \frac{\nu_{\text{рез}}}{\Delta\nu}$$

и логарифмического декремента затухания

$$\theta = \frac{\pi}{Q}.$$

Отчет по лабораторной работе должен содержать таблицу, в которой для каждой из пружин приводятся два значения частоты:  $\nu_0$  и  $\nu_{\text{рез}}$ , добротность  $Q$  и логарифмический декремент затухания  $\theta$ . Кроме того, к отчету прилагаются соответствующие графики амплитудных и фазовых кривых, которые должны быть выполнены в одном и том же масштабе по оси частот.

*Литература:* [1] — гл. 13, § 53; [3] — гл. VII, § 140, 141; [5] — гл. 3, § 10—15.

### *Лабораторная работа 23*

#### **Изучение колебаний связанных маятников**

Два математических маятника, связанных между собой пружиной, являются простейшим примером связанной системы.

Каждый свободный математический маятник, как известно, обладает двумя степенями свободы, т. е. для списания его движения требуется два параметра — углы смещения в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Система из двух маятников описывается четырьмя параметрами и, следовательно, имеет четыре степени свободы. Если колебания, соответствующие каждой из степеней свободы, независимы, то задача описания движения системы является чисто кинематической, т. е. задачей разложения сложного движения на сумму более простых движений. Если между движениями по различным степеням свободы имеется динамическая связь, при которой движение по одной степени свободы вызывает динамические изменения во всех остальных степенях свободы, то это приводит

к обмену колебательной энергии между степенями свободы, приводя к новым физическим явлениям, отсутствующим у независимой системы [1].

В настоящей лабораторной работе изучаются колебания системы из двух связанных одинаковых маятников, имеющих только две степени свободы. Для этого подвес каждого маятника осуществляется при помощи маленьких подшипников, обладающих малым трением, которые позволяют маятникам двигаться только в вертикальной плоскости, проходящей через линию, соединяющую точки подвеса (рис. 12.12).

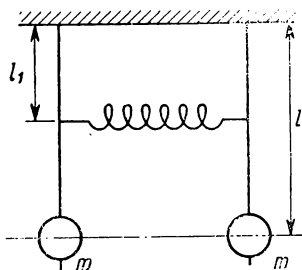


Рис. 12.12

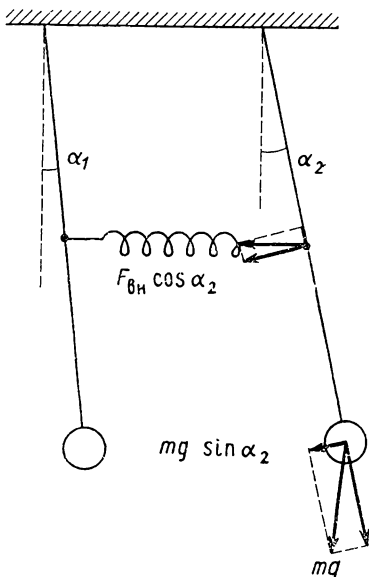


Рис. 12.13

Как известно, для свободного математического маятника уравнение моментов будет

$$J \frac{d\omega}{dt} = -mgl \sin \alpha. \quad (1)$$

Раскладывая  $\sin \alpha$  в ряд Тейлора  $\sin \alpha \approx \alpha - \alpha^3/3! + \dots$  и ограничиваясь линейным членом и учитывая, что  $J = ml^2$ , получаем уравнение гармонического осциллятора (см. введение, п. 1)

$$ml^2 \ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0 \text{ или } \ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0, \quad (2)$$

где  $\omega = \sqrt{g/l}$ . В случае связанных маятников на каждый маятник будет действовать дополнительная сила со стороны пружины  $F_{вн}$ , которая при небольших отклонениях маятников может быть рассчитана из закона Гука —  $F_{вн} = k \Delta x = kl_1(\alpha_2 - \alpha_1)$ . Эта сила создает дополнительный момент, который необходимо учитывать,

и тогда вместо (2) получаем (см. рис. 12.13) для первого и второго маятников, соответственно

$$ml^2\ddot{\alpha}_1 = -mgl \sin \alpha_1 + F_{BH} l_1 \cos \alpha_1 \cong -mgl \alpha_1 + kl_1^2 (\alpha_2 - \alpha_1), \quad (3)$$

$$ml^2\ddot{\alpha}_2 = -mgl \sin \alpha_2 - F_{BH} l_1 \cos \alpha_2 \cong -mgl \alpha_2 - kl_1^2 (\alpha_2 - \alpha_1), \quad (4)$$

где учтено, что  $\cos \alpha \cong 1 - (\alpha^2/2!) + \dots$ .

Из (3) и (4) получаем

$$\ddot{\alpha}_1 + \frac{g}{l} \alpha_1 - \frac{kl_1^2}{ml} (\alpha_2 - \alpha_1) = 0, \quad (5)$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \frac{g}{l} \alpha_2 + \frac{kl_1^2}{ml} (\alpha_2 - \alpha_1) = 0. \quad (6)$$

Складывая и вычитая (5) и (6) и вводя обозначения  $\Psi_1 = \alpha_1 + \alpha_2$  и  $\Psi_2 = \alpha_1 - \alpha_2$ , получаем

$$\ddot{\Psi}_1 + \omega_1^2 \Psi_1 = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{\Psi}_2 + \omega_2^2 \Psi_2 = 0, \quad (8)$$

где  $\omega_1 = \sqrt{g/l}$  и  $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kl_1^2}{ml^2}}$ .

Уравнения (7) и (8) являются уравнениями гармонического осциллятора, и их решение (см. введение, п. 1) будет

$$\Psi_1(t) = A_0 \sin(\omega_1 t + \Phi_1), \quad (9)$$

$$\Psi_2(t) = B_0 \sin(\omega_2 t + \Phi_2), \quad (10)$$

где  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  определяются из начальных условий при  $t=0$  и будут равны

$$A_0 = \sqrt{\Phi_{10}^2 + \frac{\Phi_{10}^2}{\omega_1^2}}; \quad B_0 = \sqrt{\Phi_{20}^2 + \frac{\Phi_{20}^2}{\omega_2^2}}; \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} \Phi_1 = \frac{\Psi_{10}\omega_1}{\dot{\Psi}_{10}}; \quad \operatorname{tg} \Phi_2 = \frac{\Psi_{20}\omega_2}{\dot{\Psi}_{20}}. \quad (12)$$

Возвращаясь к прежним координатам  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и проделывая преобразования, обратные тем, при которых были получены (7) и (8), получаем

$$\alpha_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \Phi_1) + B \sin(\omega_2 t + \Phi_2), \quad (13)$$

$$\alpha_2(t) = A \sin(\omega_1 t + \Phi_1) - B \sin(\omega_2 t + \Phi_2). \quad (14)$$

Таким образом, колебания каждого маятника удалось описать при помощи суперпозиции двух гармонических колебаний  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , которые получили название нормальных колебаний.

Амплитуды  $A$  и  $B$  и фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определяются из начальных условий ( $t=0$ ) и будут равны

$$A = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha_{01} + \alpha_{02})^2 + \frac{(\dot{\alpha}_{01} + \dot{\alpha}_{02})^2}{\omega_1^2}}, \quad (15)$$

$$B = \frac{B_0}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha_{01} - \alpha_{02})^2 + \frac{(\dot{\alpha}_{01} - \dot{\alpha}_{02})^2}{\omega_2^2}}, \quad (16)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{(\alpha_{01} + \alpha_{02}) \omega_1}{\dot{\alpha}_{01} + \dot{\alpha}_{02}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{(\alpha_{01} - \alpha_{02}) \omega_2}{\dot{\alpha}_{01} - \dot{\alpha}_{02}}. \quad (17)$$

Рассмотрим конкретные примеры.

А. Пусть в начальный момент времени второй маятник находится в состоянии покоя, а первый маятник отклонен на начальный угол  $\alpha_{01}$ . Тогда  $\alpha_{02} = \dot{\alpha}_{02} = 0$ ;  $\dot{\alpha}_{01} \neq 0$ ;  $\alpha_{01} = 0$ , откуда  $A = \dot{\alpha}_{01}/2$ ;  $B = \alpha_{01}/2$ ;  $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2 = \infty$ ;  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ . Соответственно для первого маятника получаем закон движения

$$\alpha_1(t) = \frac{\alpha_{01}}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \alpha_{01} \cos \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \cos \left( \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right). \quad (18)$$

Считая, как в нашем случае, связь достаточно слабой, т. е. считая, что  $mg l \alpha \gg k l_1 \Delta \alpha$ , получаем, что  $\omega_1 \approx \omega_2$  и  $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega' = (\omega_1 + \omega_2)/2$ . В этом случае (18) описывает так называемые биения двух близких частот, т. е.  $\alpha_1(t)$  мы можем рассматривать

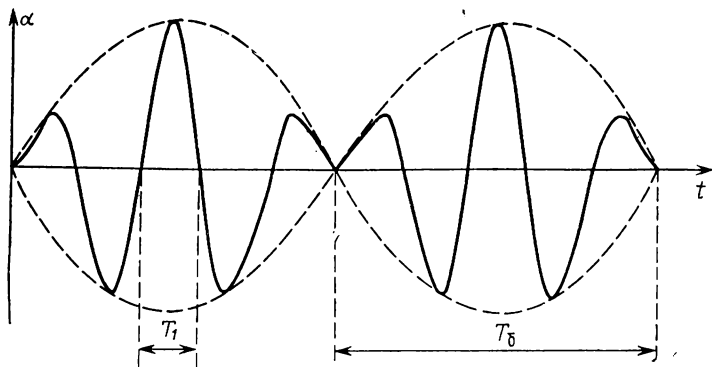


Рис. 12.14

(см. рис. 12.14) как колебания, происходящие с периодом  $T_1 = 2\pi/\omega' = 4\pi/\omega_1 + \omega_2$ , амплитуда которого медленно (по отношению к  $T_1$ ) меняется со временем по закону  $\alpha_0 \cos \Delta \omega t/2$  с периодом  $T_6 = 4\pi/\omega_2 - \omega_1$  (т. е.  $T_6 \gg T_1$ ).



Для второго маятника, находящегося в начальный момент в покое, аналогичным образом получаем

$$\alpha_2(t) = \frac{\alpha_{01}}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = -\alpha_{01} \sin \frac{\Delta \omega t}{2} \sin \omega' t. \quad (19)$$

**Б.** Пусть в начальный момент времени  $t=0$  оба маятника отклонены от положения равновесия в одну сторону на равный угол  $\alpha_{01}=\alpha_{02}$ . Тогда из начальных условий получаем  $\alpha_{01}=\alpha_{02}$ ;  $\dot{\alpha}_{01}=\dot{\alpha}_{02}=0$  и соответственно  $A=\alpha_{01}$ ;  $B=0$ ;  $\varphi_1=\varphi_2=\pi/2$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \alpha_{01} \cos \omega_1 t, \\ \alpha_2(t) &= \alpha_{01} \cos \omega_1 t. \end{aligned} \quad (20)$$

Оба маятника синхронно колеблются с первой нормальной частотой.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (21)$$

Действительно, в этом случае пружина связи не растягивается и не влияет на движение каждого маятника.

**В.** Оба маятника отклонены на равный начальный угол  $\alpha_{01}$ , но в противоположных направлениях от положения равновесия (при  $t=0$ ). Тогда  $\alpha_{01}=-\alpha_{02}$ ;  $\dot{\alpha}_{01}=\dot{\alpha}_{02}=0$  и  $A=0$ ;  $B=\alpha_{01}$ ;  $\varphi_1=\varphi_2=\pi/2$ ,

$$\alpha_1(t) = \alpha_{01} \cos \omega_2 t, \quad \alpha_2(t) = -\alpha_{02} \cos \omega_2 t. \quad (22)$$

Оба маятника колеблются со второй нормальной частотой

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kl_1^2}{ml^2}}. \quad (23)$$

**Описание установки.** Установка состоит из деревянной рамы Р (см. рис. 12.15) с установочными винтами В, на которой подвешены два одинаковых маятника  $A_1$  и  $A_2$ . Маятники состоят из длинных легких стержней  $L$ , на нижнем конце которых укреплены чечевицы массы  $m$ . Верхние концы стержней  $L$  укреплены во внутренние шайбы приборных подшипников, внешние шайбы которых крепятся в раме таким образом, чтобы плоскость подшипников, а следовательно, и плоскость движения маятников совпала с плоскостью рамы. На расстоянии  $l_1$  от точки подвеса (центра подшипника) в стержнях  $L$  просверлены маленькие отверстия для крепления легкой пружины связи, длина которой в нерастянутом состоянии точно равна расстоянию между стержнями маятников в неотклоненном положении. Ниже маятников установлен специальный стартовый механизм СМ, который позволяет плавно запускать маятник при различных начальных отклонениях от положения равновесия. Он состоит из поворачивающейся планки П, на которой в разных положениях устанавливаются неболь-

шие пластинки ПЛ, которые удерживают концы маятников в заданных отклоненных положениях. При повороте планки пластины поворачиваются вместе с ней, освобождая концы маятников, которые начинают совершать колебания.

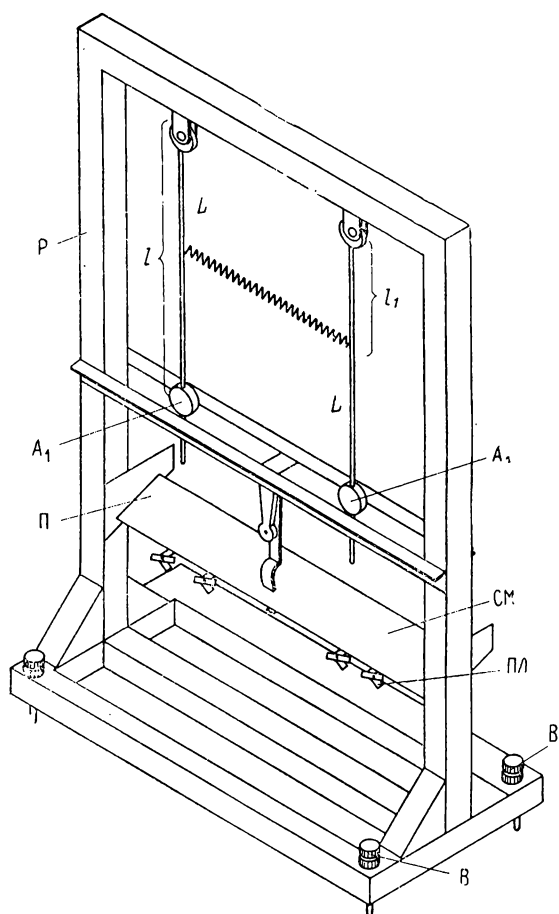


Рис. 12.15

Установка комплектуется набором пружин с различной жесткостью, секундомером и специальным станком для определения жесткости пружин статическим методом, который представляет собой укрепленную вертикально на штативе линейку с миллиметровой шкалой и набор различных грузов с известной массой.

Масса чечевиц маятников  $m$ , эффективная длина  $l$  (расстояние от точки подвеса до центра чечевицы) и расстояние  $l_1$  известны и их величины указаны на каждой установке.

**Измерения.** Прежде всего при помощи установочных винтов рамы устанавливают ее таким образом, чтобы маятники заняли в состоянии покоя строго вертикальное положение. В этом случае трение в подшипниках будет минимальным.

Затем на специальном станке статическим методом определяют коэффициенты жесткости  $k_i$  используемых пружин связи.

После этого приступают непосредственно к измерениям. Первоначально определяют периоды собственных колебаний каждого маятника в отдельности. Для этого при помощи секундомера определяется время пятидесяти колебаний каждого маятника и вычисляется период  $T_1$ . Убеждаются, что периоды обоих маятников совпадают. По среднему значению периода  $T_1$  определяется первая нормальная частота  $\omega_1 = 2\pi/T_1$ . Затем устанавливается заданная пружина связи и приступают к измерениям частот связанных колебаний.

Сначала на стартовом механизме устанавливают пластинки, соответствующие начальным условиям примера Б, т. е. оба маятника отклоняются в одну сторону на одинаковый угол. Запускают движение маятников и при помощи секундомера определяют время 20—30 колебаний сначала первого маятника и после повторного пуска — второго маятника. Из полученных измерений вычисляют первую нормальную частоту колебаний  $\omega_1$  и с учетом экспериментальных погрешностей сравнивают ее с величиной, вычисленной по формуле (21). Убеждаются в правильности соотношений (20).

Затем устанавливаются начальные условия, соответствующие примеру В, аналогичным образом определяется справедливость соотношений (22), вычисляется вторая нормальная частота колебаний  $\omega_2$  и сравнивается с вычисленной по формуле (23).

В заключение реализуют начальные условия примера А последовательно для первого и второго маятника. Определяются период  $T_6$  и частота  $\omega_6$  биений, для чего определяют время между двумя последовательными остановками в движении каждого маятника.

Все измерения проводят не менее трех раз и определяют среднее значение полученных величин.

В отчете представляются таблицы измеренных значений  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_6$  и  $\omega_1^2 - \omega_2^2 = 2kl_1^2/l^2$  и сравнение с ними величин, вычисленных из статических измерений и параметров установки.

*Литература:* [1] — гл. 13, § 55; [5] — ч. II, гл. 1, § 53—60.

# Вынужденные колебания маятника с движущейся точкой подвеса

**Теория.** Вынужденные колебания в системе возникают в том случае, если на нее действует внешняя периодическая сила. Теория вынужденных колебаний при поступательном движении рассмотрена во введении к гл. 12, п.п. 3 и 4. В случае вращательного движения все полученные во введении уравнения и выводы сохраняют свой смысл, только необходимо вместо массы  $m$  использовать момент инерции маятника  $J$ , а вместо сил — соответствующие моменты сил относительно точки подвеса маятника. В этом случае в инерциальной системе координат уравнение движения изучаемого маятника можно записать в виде (см. введение (12.27))

$$\begin{aligned} J\ddot{\alpha} &= -k\alpha - h\dot{\alpha} + N_0 \sin \omega t, \\ \ddot{\alpha} + 2\delta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha &= M_0 \sin \omega t, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $J$  — момент инерции маятника,  $\alpha$  — угол его смещения,  $\dot{\alpha}$  — угловая скорость,  $k$  — коэффициент момента возвращающих (внутренних) сил,  $N_0$  — амплитуда момента внешних сил,  $\delta = h/2J$  — декремент затухания,  $\omega_0^2 = k/J$  — частота собственных незатухающих колебаний,  $M_0 = N_0/J$  — амплитуда углового ускорения вынуждающей силы,  $\omega$  — частота вынуждающей силы,  $t$  — время.

Общее решение этого уравнения имеет вид (см. (12.28))

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi) + A_0 e^{-\delta t} \sin(\Omega t + \varphi_0). \quad (2)$$

Первый член этого решения соответствует вынужденным незатухающим колебаниям, второй — собственным затухающим колебаниям с амплитудой  $A_0$ , частотой  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  и начальной фазой  $\varphi_0$ . С течением времени последние затухают и в установившемся режиме останутся только вынужденные колебания

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

с амплитудой (см. (12.32))

$$\alpha_0 = \frac{M_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}} \quad (4)$$

и сдвигом фаз (см. (12.33))

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (5)$$

При изменении частоты вынуждающей силы  $\omega$  амплитуда  $\alpha_0$  возрастает, достигая максимума при  $\omega \approx \omega_0$  (резонанс), после чего начинает уменьшаться (см. введение, п. 4.). Сдвиг фаз с из-

менением частоты  $\omega$  изменяется от 0 до  $-\pi$ . При резонансе  $\varphi = -\pi/2$ .

В настоящей работе рассматриваются малые колебания маятника, точка подвеса которого сама совершает гармонические колебания по горизонтальной линии. В этом случае точка подвеса будет испытывать периодически меняющееся со временем ускорение  $\ddot{x}(t)$ . Для рассмотрения колебания такого маятника удобнее перейти к неинерциальной системе координат, в которой точка подвеса будет неподвижной. Однако тогда, чтобы свести уравнение движения маятника к уравнению (1), необходимо кроме обычных моментов сил, используемых в этом уравнении, учесть момент сил инерции, равный  $-m\ddot{x}$ , где  $m$  — масса маятника,  $l$  — расстояние от точки подвеса до центра масс маятника (его длина), а  $\ddot{x}$  — ускорение движения точки подвеса маятника в инерциальной (неподвижной) системе координат [см. 1, гл. 10].

Пусть точка подвеса движется по закону

$$x = b \sin \omega t, \quad (6)$$

где  $b$  — амплитуда смещения точки подвеса.

Дважды продифференцируя  $x$  по времени, получим для момента силы инерции, приложенной к маятнику

$$m\ddot{x} = mlb\omega^2 \sin \omega t. \quad (7)$$

Учитывая это, для уравнения движения маятника имеем

$$J\ddot{\alpha} = -k\alpha - h\dot{\alpha} + mlb\omega^2 \sin \omega t. \quad (8)$$

(Это уравнение движения отличается от уравнения (1) тем, что амплитуда момента внешнего воздействия зависит от частоты. Закон движения маятника после затухания его собственных колебаний приводит к вынужденным колебаниям

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (9)$$

амплитуда которых в отличие от (4) будет

$$\alpha_0 = \frac{mlb\omega^2}{J \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}}, \quad (10)$$

а сдвиг фаз

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (11)$$

Амплитуда колебаний изменяется качественно так же, как и в первом случае, изменение угла сдвига фаз тождественно с описанным ранее.

**Описание установки.** Обычно для получения вынужденных колебаний применяется электромотор. В настоящей работе используются большим физическим маятником (см. схему рис. 12.16).

Он состоит из стержня  $AB$ , укрепленного на стальной призме, и двух массивных чечевиц  $CC$ , закрепляемых на нем. Опираясь призмой в точке  $O$  на подставку, маятник может совершать колебания в вертикальной плоскости. Перемещение чечевиц по стержню позволяет получать различные периоды колебаний. Угол  $\beta$  отклонения от вертикали продольной оси стержня определяется по шкале  $M$ . Шарик  $R$  на стальной спице (малый маятник) под-

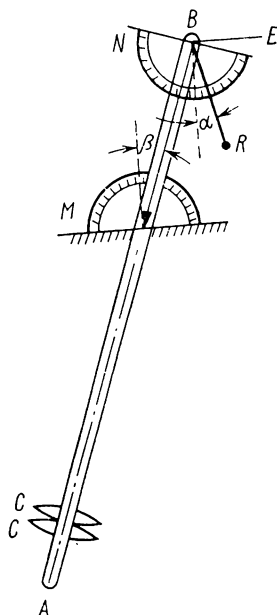


Рис. 12.16

вешен в точке  $E$  на расстоянии  $L$  от оси вращения большого маятника. При колебаниях последнего малый маятник с движущейся точкой подвеса совершает вынужденные колебания. Если угол отклонения большого маятника незначителен ( $\sin \beta \approx \beta$ ;  $\cos \beta \approx 1$ ), то точку подвеса можно считать движущейся по горизонтальной прямой с амплитудой  $b = \beta L$ .

Затухание колебаний большого маятника очень мало. Это позволяет считать его колебания незатухающими (за время установления вынужденных колебаний малого маятника) с амплитудой, равной начальному отклонению. Угловая амплитуда установившихся вынужденных колебаний малого маятника определяется по шкале  $N$ . Отсчет производится спустя время (устанавливаемое экспериментально) после исчезновения собственных колебаний малого маятника.

Начальное отклонение большого маятника от его положения равновесия при всех частотах его колебаний должно быть строго

постоянным. Во избежание порчи лезвия призмы освобождение и закрепление чечевиц на стержне следует производить только тогда, когда маятник повернут на  $90^\circ$  вокруг своей продольной оси и плоскости его призмы опираются на подставку.

Каждый раз, возвращая маятник в рабочее положение, необходимо убедиться, что он установлен в нужной плоскости, а лезвие призмы заняло правильное (нижнее) место на опорной площадке.

Чечевицы лучше перемещать отдельно друг от друга. Закрепляется нижняя, верхняя опускается на нее и также закрепляется.

**Измерения. 1. Получение амплитудной характеристики  $\alpha_0 = f(\omega)$ .** Предварительно необходимо определить циклическую частоту  $\Omega_1$  и декремент затухания  $\delta$  собственных колебаний малого маятника, а также измерить время  $\tau_0$ , за которое они полностью затухают. Для этого при покоящемся большом маятнике отклоняют малый маятник на угол  $10^\circ$ — $15^\circ$ . Маятник отпускают, включая одновременно секундомер. Последний останавливают, когда останавливается маятник. Измерение времени  $\tau_0$  производят не менее трех раз, вычисляют среднее арифметическое значение  $\tau_0$ , которым пользуются в дальнейшем.

Определяют период  $T_1$  собственных колебаний малого маятника. Период определяется из трех полных колебаний маятника. Время, затрачиваемое на эти колебания, измеряется секундомером не менее десяти раз. Вычисляют среднее значение периода  $\bar{T}_1$ , а затем среднее значение циклической частоты  $\bar{\Omega} = 2\pi/\bar{T}_1$  собственных колебаний малого маятника.

Для определения декремента затухания  $\delta$  малого маятника следует измерить время  $\tau$  целого числа  $n$  его полных периодов, за которое амплитуда его колебаний уменьшается от  $\alpha_1$  до  $\alpha_\tau$ . Величины  $\alpha_1$  и  $\alpha_\tau$  отсчитываются по шкале  $N$ . Время  $\tau$  измеряется секундомером, или, зная величину полного периода колебаний  $\bar{T}_1$  и число периодов колебаний, вычисляют

$$\tau = n\bar{T}_1.$$

Измерения величин  $\alpha_1$ ,  $\alpha_\tau$  и  $\tau$  проводятся не менее трех раз. Пользуясь средними арифметическими значениями этих величин, вычисляют декремент затухания по формуле

$$\delta = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_\tau} = \frac{1}{\tau} 2,3 \lg \frac{\alpha_1}{\alpha_\tau}.$$

Последовательность измерения  $\alpha_0$  и  $\omega$  следующая. Укрепляют нижнюю чечевицу в самой нижней точке стержня. Верхнюю опускают на нижнюю и также закрепляют. Проверяют правильность положения призмы большого маятника на подставке. Большой маятник отклоняют на  $5^\circ$  и, отпуская его, включают секундомер. Для определения периода  $T$  колебаний большого маятника отсчитывают целое число полных периодов за время  $\tau_1 > \tau_0$  и выключают секундомер.

За это время затухают собственные колебания малого маятника, амплитуда колебаний большого маятника практически не меняется. По шкале  $N$  измеряют амплитуду установившихся колебаний  $\alpha_0$  малого маятника. Все измерения следует проделать не менее пяти раз. Вычисляют среднее значение амплитуды  $\bar{\alpha}_0$  вынужденных колебаний малого маятника и среднее значение циклической частоты  $\bar{\omega} = 2\pi/\bar{T}$  колебаний большого (частоты внешнего воздействия на малый маятник) маятника.

Аналогичным образом измеряют величины  $\alpha$  и  $\omega$ , помещая чечевицы последовательно на деления: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 (на этих делениях закрепляют стопор нижней чечевицы). Полученный экспериментальный материал необходимо представить в виде графика на миллиметровой бумаге, откладывая по оси абсцисс частоту  $\bar{\omega}$ , а по оси ординат амплитуду  $\bar{\alpha}_0$ . Если график кривой окажется недостаточно выявленным (экспериментальные точки располагаются неравномерно), необходимо произвести дополнительные измерения и получить еще 2—3 точки для нужных частот.

Следует отметить, что при  $\bar{\omega} \approx \bar{\Omega}$  (резонанс) колебания малого маятника перестают быть линейными ( $\sin \alpha \neq \alpha$ ). Уравнение движения (8) малого маятника для верхней части амплитудной кривой неприменимо.

**2. Получение фазовой характеристики  $\varphi = f_1(\omega)$ .** Наблюдая колебания малого маятника, необходимо убедиться, что:

1. При малых частотах ( $\omega \ll \Omega$ ) смещение малого маятника находится практически в фазе со смещением точки подвеса (в противофазе со смещением нижней части большого маятника). Сдвиг фаз в этом случае близок к нулю ( $\varphi \rightarrow 0$ ).

2. При больших частотах ( $\omega \gg \Omega$ ) смещение малого маятника находится практически в противофазе со смещением точки подвеса (в фазе со смещением нижней части большого маятника). Сдвиг фаз в этом случае близок к  $180^\circ$  ( $\varphi = -\pi$ ). Устанавливают предельные значения (0 и  $\pi$ ) угла сдвига фаз, что находится в полном согласии с уравнением

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2} = - \frac{2\omega\delta}{\Omega^2 + \delta^2 - \omega^2}. \quad (12)$$

Зная величины  $\Omega$  и  $\delta$ , пользуясь этой формулой, можно рассчитать и другие значения угла сдвига фаз, находящиеся между предельными значениями. Вычисления следует произвести для девяти частот  $\omega_i$ . Одна из них резонансная, при которой достигается наибольшая (на полученной амплитудной характеристике) амплитуда колебаний малого маятника, восемь других берут на восходящей (четыре) и на нисходящей (четыре) ветвях амплитудной характеристики, располагая их на равном расстоянии друг от друга. Вычисленные величины угла сдвига фаз необходимо представить в виде графика на миллиметровой бумаге, откладывая по оси абсцисс частоту, по оси ординат — угол сдвига.

**Литература:** [1] — гл. 13, § 60; [3] — гл. 17, § 140; [4] — гл. 14, § 127, 128.



## **Вынужденные колебания в системе с двумя степенями свободы**

**Теория.** Реальная физическая система при учете всех возможных в ней типов движений обладает практически бесконечным числом степеней свободы. Но в абстрактной модели необходимо учитывать лишь тот масштаб времени и амплитуды смещений, который может быть зарегистрирован в данном конкретном эксперименте. Например, не имеет смысла принимать во внимание очень быстрые и малые смещения атомов и молекул в изучении движения физического маятника и, наоборот, возможное изменение положения тела в описании колебаний его кристаллической решетки. Однако даже после жесткого отбора значимых типов движений и связей лишь очень небольшое число физических систем может быть описано с помощью одной независимой переменной, т. е. как системы с одной степенью свободы. Значительная часть физических процессов описывается только с учетом бесконечного числа степеней свободы (распределенные системы) или многих степеней свободы (многоатомные молекулы, кристаллические решетки).

Наблюдая за движением системы со многими степенями свободы, можно заметить, что ее различные фрагменты (в нашем случае — маятники) периодически изменяют амплитуду колебаний, т. е. колебания отдельных элементов нестационарны. Вместе с изменением амплитуды колебаний происходит изменение среднего (за период колебаний) запаса кинетической энергии данного элемента, что свидетельствует о существовании в системе периодического перераспределения энергии.

Лишь в двух специальных случаях в системе наблюдаются только стационарные колебания (элементы системы отклоняются от положения равновесия с постоянной амплитудой):

во-первых, при фиксировании положения всех элементов — маятников, атомов и др. — кроме одного. В этом случае система искусственно переводится в режим колебаний с одной степенью свободы. Частота такого типа колебаний называется парциальной частотой, а «остаток» колебательной системы — парциальной колебательной системой. Как указано в [1, 2], число независимых парциальных систем, которые можно создать из исходной, совпадает с числом степеней свободы;

во-вторых, удачным подбором начальных отклонений разных элементов иногда удается возбудить колебания с постоянной во времени амплитудой движения всех элементов системы. Такие колебания называются собственными или нормальными для данной колебательной системы. Их число также совпадает с числом степеней свободы.

Рассмотрим движение двух математических маятников, связанных пружиной и совершающих колебания в плоскости рисун-

ка (рис. 12.17). Будем считать углы отклонения маятников малыми ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ). В этом приближении уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 &= -m_1 l_1 g \varphi_1 + k a^2 (\varphi_2 - \varphi_1), \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 &= -m_2 l_2 g \varphi_2 + k a^2 (\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $m_1, m_2$  — массы грузов,  $k$  — коэффициент упругости.

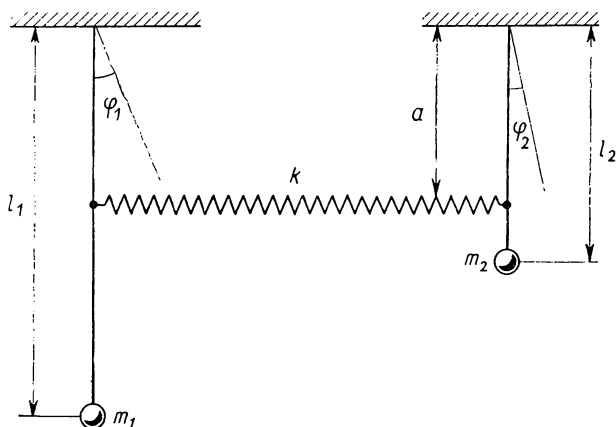


Рис. 12.17

Частоты парциальных колебаний получим из уравнений движения, приравнявая в первом из них  $\varphi_2=0$ , а во втором —  $\varphi_1=0$ :

$$\nu_1^2 = \frac{g}{l_1} + \frac{k a^2}{m_1 l_1^2}, \quad \nu_2^2 = \frac{g}{l_2} + \frac{k a^2}{m_2 l_2^2}. \quad (2)$$

Решение системы уравнений движения, соответствующее собственным (нормальным) колебаниям системы, ищем в виде

$$\varphi_1 = A \cos(\omega t + \psi), \quad \varphi_2 = B \cos(\omega t + \psi),$$

где частота  $\omega$  и сдвиг фаз  $\psi$  одинаковы для обоих маятников, различны лишь амплитуды смещений (знак амплитуды произволен). После математических преобразований, изложенных в [3], получим две возможные частоты колебаний:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \nu_1^2 + \nu_2^2 - \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4 \frac{k^2 a^4}{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}} \right)}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \nu_1^2 + \nu_2^2 + \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4 \frac{k^2 a^4}{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}} \right)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Соотношение амплитуд смещений маятников на частотах нормальных колебаний составляет

$$\left. \frac{B}{A} \right|_{\omega_1} = \frac{\nu_1^2 - \omega_1^2}{ka^2} m_1 l_1^2 = \kappa_1; \quad \left. \frac{B}{A} \right|_{\omega_2} = \frac{\nu_1^2 - \omega_2^2}{ka^2} m_1 l_1^2 = \kappa_2. \quad (4)$$

Измерение частот парциальных колебаний в изучаемой системе производится при поочередном закреплении одного из маятников в положении равновесия. Частоты нормальных (собственных) колебаний не удастся измерить настолько же просто, так как при нарушении равновесия системы возникает суперпозиция собственных колебаний вида

$$\varphi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2),$$

$$\varphi_2 = A_1 \kappa_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \kappa_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2),$$

где постоянные  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  определяются начальными условиями. Колебание каждого из маятников есть сумма двух гармонических колебаний с собственными (нормальными) частотами. Если эти (нормальные) частоты близки по величине, суммарные колебания имеют характер биений. Лишь в одном частном случае совпадающих параметров парциальных колебательных систем ( $m_1 = m_2 = m$ ;  $l_1 = l_2 = l$ ) можно напрямую измерить частоты нормальных колебаний исходя из наблюдения свободных колебаний нашей системы. Действительно, в этом случае

$$\nu_1^2 = \nu_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}; \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{mk^2};$$

$$\left. \frac{B}{A} \right|_{\omega_1} = 1, \quad \left. \frac{B}{A} \right|_{\omega_2} = -1,$$

т. е. на частоте  $\omega_1$  маятники колеблются синфазно, а на частоте  $\omega_2$  — в противофазе. Возбуждение того или другого типа колебаний не представляет труда.

Несмотря на относительно сложное выделение нормальных колебаний при свободном движении системы со многими степенями свободы, именно эти формы движения определяют резонансные характеристики системы при действии на нее периодической вынуждающей силы. Частоты поглощения и излучения многоатомных молекул в газовой и жидкой фазе, кристаллах совпадают с соответствующими нормальными частотами системы. Резонансные характеристики механических конструкций также определяются собственными (нормальными) частотами. В пренебрежении затуханием колебаний амплитуда движения системы со многими степенями свободы под действием вынуждающей силы с частотой, равной одной из нормальных частот, стремится к бесконечности, что приводит к разрушению системы.

Вынуждающая сила в нашей системе действует на один из маятников, обозначаемый далее индексом «1». Пусть частота вынуждающей силы равна  $p$ , а амплитудное значение момента отно-

сительно точки крепления первого маятника  $M_0$ . Уравнение движения под действием вынуждающей силы

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 &= -m_1 l_1 g \varphi_1 + k a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) + M_0 \sin(pt), \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 &= -m_2 l_2 g \varphi_2 - k a^2 (\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Будем предполагать, что собственные колебания в системе затухли (хотя явного учета затухания у нас в системе уравнений (5) нет!) и установились вынужденные колебания с частотой  $p$ . Решение ищем в виде

$$\varphi_1 = C_1 \sin(pt), \quad \varphi_2 = C_2 \sin(pt).$$

Используя соотношение (2), преобразуем систему (5)

$$(\nu_1^2 - p^2) C_1 - \frac{k a^2}{m_1 l_1^2} C_2 = \frac{M_0}{m_1 l_1^2}, \quad (\nu_2^2 - p^2) C_2 - \frac{k a^2}{m_2 l_2^2} C_1 = 0$$

и определим амплитуды  $C_1$  и  $C_2$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{M_0}{m_1 l_1^2} \cdot \frac{(\nu_1^2 - p^2)}{\left[ (\nu_1^2 - p^2)(\nu_2^2 - p^2) - \frac{k^2 a^4}{m_1 l_1^2 m_2 l_2^2} \right]}, \\ C_2 &= \frac{M_0}{m_1 l_1^2} \cdot \frac{k a^2}{m_2 l_2^2} \cdot \frac{1}{\left[ (\nu_1^2 - p^2)(\nu_2^2 - p^2) - \frac{k^2 a^4}{m_1 l_1^2 m_2 l_2^2} \right]}. \end{aligned} \quad (6)$$

Зависимость амплитуд смещения маятников от частоты вынуждающей силы представлена на рис. 12.18. Резонансное возрастание амплитуды наблюдается вблизи обеих нормальных частот. Интересен факт подавления колебаний первого маятника (к которому приложена вынуждающая сила) на парциальной частоте колебаний второго маятника. Такое подавление вызвано компенсацией момента вынуждающей силы моментом силы, действующей со стороны второго маятника. Предлагается самостоятельно проверить выполнение условия компенсации. Отмеченный эффект широко применяется на практике: механические успокоители колебаний валов конструируются на основе дополнительной колебательной системы с требуемой парциальной частотой.

**Описание экспериментальной установки.** Прибор для исследования колебаний связанных систем состоит из двух маятников, устройства возбуждения колебаний и системы регистрации периода колебаний. Максимальная длина маятника — 0,5 м, масса перемещаемых грузов — 0,1 кг. Амплитуда колебаний регистрируется по отградуированной шкале, расположенной между концами — указателями маятников. Частота вынуждающей силы может изменяться в диапазоне от 0,25 и до 1,5 Гц; амплитуда момента

силы варьируется перемещением соединительной пружины вдоль маятника.

На лицевой стороне панели блока управления и измерений находятся следующие тумблеры:

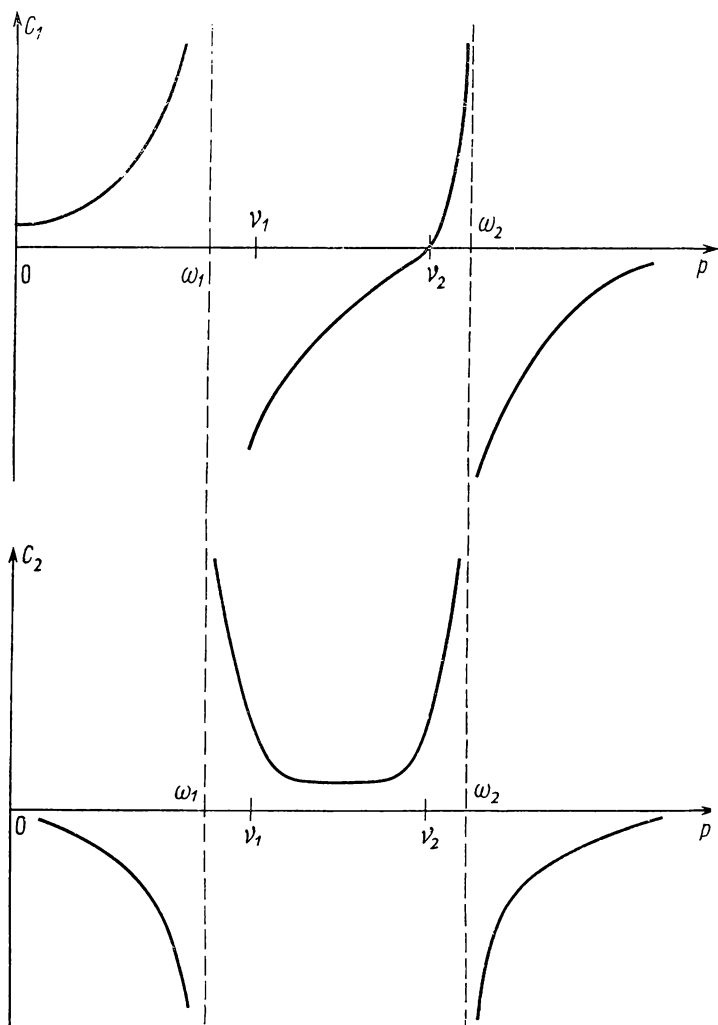


Рис. 12.18

**СЕТЬ** — включение и выключение сети,  
**ВКЛЮЧЕНИЕ ДВИГАТЕЛЯ** — обеспечивает подведение питающего напряжения к схеме управления скоростью вращения двигателя,

**СБРОС** — сброс показаний измерителя времени и начало нового цикла отсчетов,  
**СТОП** — окончание измерений,  
**ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ** — потенциометр настройки скорости вращения двигателя.

**Подготовка к измерениям.** Прибор готов к использованию непосредственно после включения сетевого напряжения.

Для приготовления прибора необходимо

- подключить прибор к питающей сети,
- проверить выравнивание прибора,
- нажать клавишу СЕТЬ, проверяя, все ли индикаторы измерителя высвечивают цифру «0», а также светится ли лампочка фотоэлектрического датчика,
- проверить, находятся ли стержни маятников на одной вертикальной плоскости,
- включить питание двигателя,
- плавно вращая ручку потенциометра, проверить, работает ли двигатель и колеблются ли маятники.

**Упражнение 1. Определение частот парциальных и нормальных колебаний связанной системы из двух одинаковых маятников.** Согласно изложенной выше теоретической модели рассматриваемая колебательная система имеет два типа нормальных колебаний: синфазное  $\omega_{сф} = \sqrt{g/l}$ , противофазное  $\omega_{пф} = \sqrt{g/l + 2ka^2/ml^2}$  и два парциальных колебания, совпадающих по частоте:  $\nu = \sqrt{g/l + ka^2/ml^2}$ .

При изменении точки крепления маятников пружиной следует ожидать монотонного изменения частоты нормальных колебаний  $\omega_{пф}$  и частоты парциальных колебаний  $\nu$  при сохранении постоянной частоты нормальных колебаний  $\omega_{сф}$ .

**Измерение частот  $\omega_{сф}$ ,  $\omega_{пф}$  и  $\nu$**  советуем выполнить следующим образом:

- установить обоймы, крепящие пружины, в верхней части стержней маятников, а грузы — на нижней части для обоих маятников на одинаковом расстоянии;
- отсоединить пружины от обоймы, соединяющей маятники со стержнем, возбуждающим колебания;
- нажать кнопку СЕТЬ;
- отклонить маятники в одинаковую ( $\omega_{сф}$ ) или противоположные ( $\omega_{пф}$ ) стороны на угол около  $10^\circ$  и отпустить их;
- при измерении частоты парциальных колебаний зафиксировать ближайший к наблюдателю маятник, свободный маятник вывести из положения равновесия на тот же угол и отпустить;
- нажать кнопку СБРОС;
- после подсчета прибором 10 периодов колебаний маятника нажать кнопку СТОП;

— считать с показателей время и количество периодов колебаний, вычислить частоту по формуле

$$\omega = \frac{2\pi n}{t},$$

где  $n$  — количество периодов,  $t$  — продолжительность измерений. Перемещая пружину, связывающую маятники, вдоль стержней маятников, измерить зависимость частот нормальных и парциальных колебаний от координаты точки крепления пружины. По окончании измерений построить в одной системе координат графики зависимостей  $\omega^2(a)$ ,  $\nu^2(a)$ . Вычислить на основе экспериментальных зависимостей коэффициент жесткости пружины  $k$ .

**Упражнение 2. Изучение резонанса смещений в системе с двумя степенями свободы.** Используя результаты первого упражнения, установить связывающую маятники пружину в положение, обеспечивающее максимальное различие  $\omega_{сф}$  и  $\omega_{пф}$ .

**Измерения** советуем выполнять в следующем порядке:

- соединить пружину с обоймой на стержне, возбуждающем колебания;
- включить питание двигателя;
- изменяя обороты двигателя и выжидая установления колебаний, провести измерение амплитуды колебаний второго маятника по шкале на передней панели установки. Частоту колебаний вычислить по 10 периодам, отсчитанным измерителем времени;
- зафиксировать прекращение движения первого маятника при  $p \simeq \nu$ . Результаты измерений представить в виде графической зависимости амплитуды колебаний второго маятника от частоты вынуждающей силы.

*Литература:* [1] — § 55; [4] — § 132—136; Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. М., 1978. Гл. 6.

## ГЛАВА 13

### УПРУГИЕ ВОЛНЫ

Если какая-либо колебательная система соединена некоторым образом со сплошной средой, то благодаря механической связи этой системы со средой и в силу того, что отдельные участки сплошной среды упруго связаны друг с другом, возникший в одном месте среды колебательный процесс будет распространяться в пространстве среды в виде упругой волны. Рассмотрим этот процесс более подробно на примере распространения продольных упругих волн в изотропном твердом теле. Для этого поместим один конец достаточно длинного (полубесконечного) металлического стержня в начало координат, ось  $X$  направим вдоль стержня. Если внешним устройством привести этот конец стержня ( $x=0$ ) в колебательное движение по оси  $X$ , то по длине стержня будет распространяться упругая продольная волна. Рассмотрим участок стержня, расположенный между сечениями с координатой  $x$  и  $x + \Delta x$  (рис. 13.1). При прохождении волны левое из

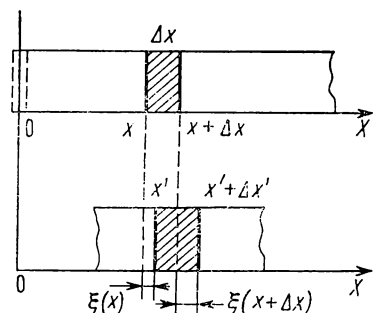


Рис. 13.1

этих сечений будет испытывать смещение  $\xi(x) = x' - x$ , а правое  $\xi(x + \Delta x) = x' + \Delta x' - (x + \Delta x)$ . В общем случае рассматриваемый участок стержня будет испытывать деформацию, т. е.  $\Delta x \neq \Delta x'$ , которая будет равна (см. гл. 11)  $[\xi(x + \Delta x) - \xi(x)]/\Delta x$  или, переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,

$$\epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (13.1)$$



Если  $\varepsilon > 0$ , то произошло растяжение участка стержня, если  $\varepsilon < 0$ , то сжатие.

При смещении как левого, так и правого конца участка стержня за счет межатомного взаимодействия возникают силы, действующие на наш участок стержня. Отношение этих сил к первоначальной площади сечения стержня  $S_0$  называется напряжением

$$\sigma = \frac{F}{S_0}. \quad (13.2)$$

При малых деформациях выполняется закон Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (13.3)$$

где  $E$  — модуль Юнга для продольного стержня.

Напишем уравнение движения для нашего участка стержня. Его масса равна  $\rho S_0 \Delta x$ . Если  $\xi$  — смещение его центра тяжести, то

$$\rho S_0 \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S_0 \sigma(x + \Delta x) - S_0 \sigma(x), \quad (13.4)$$

где справа стоит результирующая сила.

Разделив обе части (13.4) на  $S_0 \Delta x$  и устремив  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)}{[\Delta x]} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (13.5)$$

учитывая (13.3) и (13.1),

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (13.6)$$

или

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \quad (13.7)$$

где  $u = \sqrt{E/\rho}$ .

Выражение (13.6) называется волновым уравнением. Его решение, как легко можно убедиться непосредственной подстановкой, будет иметь вид  $f_1(x - ut) + f_2(x + ut)$ , где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные функции.

В частном случае гармонических волн конец стержня  $x = 0$  будет совершать гармонические колебания. В этом случае можно записать

$$\xi(x, t) = \xi(x) e^{i\omega t}. \quad (13.8)$$

Подставляя (13.8) в (13.6) и сокращая  $e^{i\omega t}$ , получаем

$$-\frac{\partial^2 \xi(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{u^2} \xi(x) = 0$$

или

$$\frac{d^2 \xi(x)}{dx^2} + k^2 \xi(x) = 0, \quad (13.9)$$

где  $k^2 = \omega^2/u^2$ .

Общее решение этого уравнения будет

$$\xi(x) = a_1 e^{-ikx} + a_2 e^{ikx}. \quad (13.10)$$

Тогда, подставляя (13.10) в (13.8), получаем

$$\xi(x, t) = a_1 e^{i(\omega t - kx)} + a_2 e^{i(\omega t + kx)}. \quad (13.11)$$

Выражение

$$\xi(x, t) = a_1 e^{i(\omega t - kx)}$$

или его реальная часть (см. уравнение Эйлера (12.12))

$$\xi(x, t) = a_1 \cos(\omega t - kx) \quad (13.12)$$

является уравнением бегущей волны смещения, распространяющейся по направлению  $x$ . Соответственно

$$\xi(x, t) = a_2 \cos(\omega t + kx) \quad (13.13)$$

бегущая волна, распространяющаяся в противоположном направлении —  $x$ .

Это следует из того, что точка постоянной фазы

$$(\omega t \pm kx) \quad (13.14)$$

в первом случае двигается в направлении возрастания  $x$ , т. е. при увеличении  $t$  также возрастает, во втором случае — наоборот. При этом скорость движения точки постоянной фазы, или, что то же самое, фазовая скорость волны, находится путем дифференцирования (13.14) по времени, откуда (см. (13.9) и (13.7))

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\omega}{k} = u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (13.15)$$

Длина волны  $\lambda$ , т. е. ближайшее расстояние между двумя точками волны, находящимися в одинаковой фазе, будет

$$\lambda = uT = u \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{k}, \quad (13.16)$$

где  $T$  — период волны, а  $k$  — волновое число.

Фазовую скорость распространения волны  $u$ , которая определяется (13.15) и не зависит от частоты  $\omega$ , следует отличать от скорости колеблющихся частиц стержня  $v$ , которую получим, дифференцируя по  $t$  смещение  $\xi(x, t)$  (13.12):

$$v = -\omega a_1 \sin(\omega t - kx). \quad (13.17)$$

Учитывая (13.1) и (13.3), для бегущих волн деформации и напряжения соответственно получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon(x, t) &= ka_1 \sin(\omega t - kx), \\ \sigma(x, t) &= Eka_1 \sin(\omega t - kx).\end{aligned}\tag{13.18}$$

Если стержень имеет конечную длину, то от правого конца стержня бегущая волна отражается и движется в противоположную сторону. В этом случае возникает суперпозиция двух волн (13.12) и (13.13).

Рассмотрим стержень длины  $l$ . Пусть правый конец этого стержня свободен (не закреплен). В этом случае бегущая волна отражается от свободного конца без изменения фазы. Если пренебречь затуханием, то распределение смещений по стержню будет определяться суперпозицией бегущей  $\xi_1(x, t)$  и отраженной  $\xi_2(x, t)$  волн, которые образуют так называемую стоячую волну [1, 2]:

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = a_1 \cos(\omega t - kx) + a_1 \cos[\omega t + k(x - 2l)] = \\ &= 2a_1 \cos k(l - x) \cos(\omega t - kl).\end{aligned}\tag{13.19}$$

Такая волна образуется только в том случае, если смещение, вызванное отраженной бегущей волной  $\xi_2(x, t)$  в точке закрепления стержня (левый конец стержня, когда  $x=0$ ), будет равно нулю. В противном случае в  $\xi(x, t)$  следует учитывать вторичное отражение бегущей волны от левого и правого концов стержня, т. е. распределение смещений по стержню будет значительно сложнее.

Таким образом, условием резонанса стержня будет

$$[\cos k(l - x)]_{x=0} = \cos kl = 0 \text{ и } kl = (2n + 1)\pi/2.$$

Переходя от  $k$  к  $\lambda$ , получаем, что резонанс будет наблюдаться тогда, когда будет выполняться условие, что на длине стержня укладывается нечетное число четвертей длин волн

$$l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}.\tag{13.20}$$

Такие колебания будут сохраняться в стержне сколь угодно долго (при отсутствии затухания) и без помощи вынуждающей силы, поэтому их еще часто называют собственными колебаниями стержня, закрепленного на одном конце.

Для стержня, закрепленного с обеих концов, расчет приводит к соотношению

$$l = n \frac{\lambda}{2}.\tag{13.21}$$

Обычно длина стержня задана и изменяют длину волны  $\lambda$ , а следовательно, и частоту  $\omega$  для того, чтобы добиться условий резонанса (13.20) и (13.21). Соответствующий расчет для частот,

удовлетворяющих (13.20) и (13.21) (называемых собственными частотами), дает

$$v_{n_1} = \frac{n_1}{4l} u = \frac{n_1}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \text{ где } n_1 = 1, 3, 5, \dots, \quad (13.20)^a$$

$$v_{n_2} = \frac{n_2}{2l} u = \frac{n_2}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \text{ где } n_2 = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (13.21)^a$$

Мы рассмотрели продольные колебания стержней. Аналогично рассматриваются и поперечные колебания стержней, учитывая только, что фазовая скорость смещения в этом случае будет определяться не модулем Юнга, а модулем сдвига (см. гл. 11)

$$u_{\text{попереч}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (13.22)$$

Особый случай представляет струна [3], натянутая между двумя неподвижными зажимами, расположенными на расстоянии друг от друга.

Линейная плотность струны массы  $M$  будет

$$\rho_0 = \frac{M}{L}. \quad (13.23)$$

Если направить струну вдоль оси  $Z$ , считая координату первого зажима  $z=0$ , а второго  $z=L$ , и отклонить какую-либо точку по координате  $x$ , то возникают поперечные колебания этой точки и по струне побегут в обе стороны бегущие поперечные волны  $\psi(z, t)$ . Отражаясь от зажимов, они будут интерферировать, образуя для определенных частот стоячую волну, аналогично рассмотренному выше случаю стержня. Отличие заключается в том, что фазовая скорость бегущей волны  $\psi(z, t)$  в струне зависит от натяжения струны  $T_0$ . Чтобы показать это, рассмотрим малый участок струны  $\Delta z$  с центром в  $z$ .

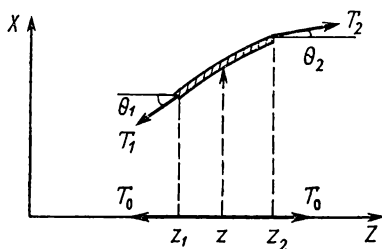


Рис. 13.2

В общем случае, когда струна не находится в состоянии равновесия, а совершает колебания, среднее смещение нашего участка  $\Delta z$  будет  $\psi(z, t)$  и на него начнут действовать силы  $T_1$  и  $T_2$  (см. рис. 13.2).

Полная сила, действующая на  $\Delta z$ , будет

$$F_x(t) = T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1. \quad (13.24)$$

Так как отклонение мало, считаем, что отклоненный участок приближенно не меняет своей длины. Тогда общее натяжение струны не меняется и остается равным  $T_0$ , т. е. горизонтальные составляющие сил, действующих на участок, будут

$$T_0 = T_1 \cos \theta_1 = T_2 \cos \theta_2. \quad (13.25)$$

Учитывая, что  $\sin \Theta = \cos \Theta \cdot \operatorname{tg} \Theta$ , а  $\operatorname{tg} \Theta = \partial \psi(z, t) / \partial z$  — наклон кривой  $\psi(z, t)$  в точке  $z$ , перепишем (13.24) в виде

$$\begin{aligned} F_x(t) &= T_2 \cos \theta_2 \operatorname{tg} \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 \operatorname{tg} \theta_1 = \\ &= T_0 \operatorname{tg} \theta_2 - T_0 \operatorname{tg} \theta_1 = T_0 \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_2 - \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_1 \right]. \end{aligned} \quad (13.26)$$

Обозначая  $\partial \psi(z, t) / \partial z = f(z)$  и раскладывая  $f(z)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_1$ , а затем положив  $z = z_2$ , получаем

$$f(z_2) = f(z_1) + (z_2 - z_1) \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_1 + \frac{1}{2} (z_2 - z_1)^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)_1 + \dots \quad (13.27)$$

Ограничиваясь линейными членами и учитывая, что  $z_2 - z_1 = \Delta z \rightarrow 0$ , получаем

$$f(z_2) - f(z_1) = \Delta z \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \Delta z \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}, \quad (13.28)$$

откуда вместо (13.24) получаем

$$F_x(t) = T_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}. \quad (13.29)$$

Учитывая, что согласно (13.23) масса нашего участка будет  $\Delta M = \rho_0 \Delta z$ , получаем уравнение движения

$$\begin{aligned} \rho_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} &= F_x(t) = T_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\rho_0}{T_0} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (13.30)$$

Таким образом, мы получили волновое уравнение для струны, откуда следует (см. (13.6)), что фазовая скорость волны  $\psi(z, t)$  будет

$$u_\phi = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}. \quad (13.31)$$

*Литература:* [3] — гл. XIX, § 153, 154; Крауфорд Ф. Волны. М.: Наука, 1974. Гл. 2.

## Исследование поперечных колебаний струны

Работа посвящена исследованию колебаний, которые возникают в гибкой однородной струне, натянутой между двумя неподвижными точками. Если в бесконечной натянутой струне, находящейся в состоянии равновесия, оттянуть маленький участок и затем отпустить его, то возникающее возмущение начнет передвигаться по струне в двух противоположных направлениях, образуя две бегущие волны. Так как в этом случае смещение частиц струны происходит в направлении, перпендикулярном направлению движения волны (совпадающим с направлением струны), то такие волны называются поперечными. Движение таких бегущих волн описывается волновым уравнением, приближенный вывод которого приведен во введении (см. (13.30)). При этом характеристики волны, такие как ее форма, частота  $\nu$ , длина волны  $\lambda$ , фазовая скорость  $u$ , определяются начальными условиями и параметрами струны — ее плотностью  $\rho$  и величиной натяжения  $T_0$ .

Если струна конечна, то бегущие волны будут отражаться от ее концов, причем фазы и амплитуды отраженных волн будут зависеть от положения и способа закрепления концов струны. Отраженные и бегущие волны будут интерферировать, образуя в общем случае сложную и нестационарную (зависящую от времени) картину распределения смещений вдоль струны. В силу всегда имеющей место диссипации энергии указанная картина с течением времени будет затухать.

Чтобы наблюдать стационарную картину, в работе используются вынужденные колебания струны, когда возмущение в струне вызывается внешней периодической (в нашем случае гармонической) силой. При определенных условиях в струне возникают стоячие волны — явление, которое называют резонансом струны.

Рассмотрим подробнее эти условия для конечной струны длины  $L$ , пренебрегая затуханием волн. При отражении бегущей волны от закрепленного конца струны отраженная волна будет отличаться по фазе от падающей волны на  $\pi$ . Таким образом, если уравнение падающей волны будет

$$\psi_1(z, t) = A \cos(\omega t - kz), \quad (1)$$

то для отраженной волны

$$\psi_2(z, t) = -A \cos[\omega t + k(z - 2L)]. \quad (2)$$

Уравнение стоячей волны будет (сравнить с (13.19))

$$\psi(z, t) = \psi_1 + \psi_2 = -2A \sin k(L - z) \sin(\omega t + kL). \quad (3)$$

Места, в которых амплитуда смещения стоячей волны  $2A \sin k(L - z)$  равна нулю, называются узлами стоячей волны, места, где она равна  $2A$ , — пучностями стоячей волны. Условием

образования стоячих волн в струне, закрепленной с двух сторон, будет необходимость создания узлов стоячей волны на концах струны. Для  $z=L$  это условие выполняется автоматически, при  $z=0$  необходимо, чтобы  $[\sin k(L-z)] = \sin kL = 0$  или  $kL = n\pi$ , откуда

$$L = n \frac{\lambda}{2}. \quad (4)$$

Другими словами, резонанс будет наступать при условии, что на длине струны укладывается целое число полувольт (см. рис. 13.3). Так как  $\lambda = u/v$ , то резонансными частотами будут

$$\nu_n = \frac{u}{2L} \cdot n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

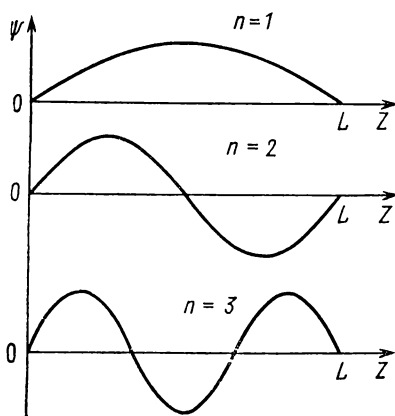


Рис. 13.3

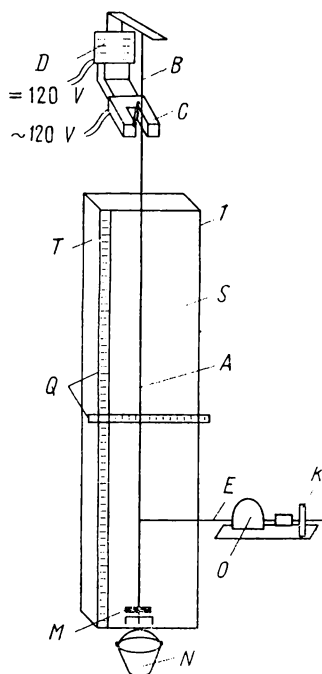


Рис. 13.4

В отличие от стержней в струне фазовая скорость  $u$  зависит от натяжения струны  $T_0$  (см. (13.31))

$$u = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}, \quad (6)$$

где  $\rho = M/L$  — линейная плотность,  $M$  — масса струны.

Это обстоятельство позволяет проводить эксперимент по наблюдению стоячих волн в струне двумя способами. Первый из них

закljučается в том, что при постоянном натяжении струны  $T_0$  изменять частоту вынуждающей силы  $\nu$ , наблюдая резонанс при условиях (5). Второй — при неизменной частоте вынуждающей силы  $\nu$  изменять натяжение струны  $T_0$ ; при этом резонанс будет наступать при условиях

$$T_0 = \frac{4L^2\nu^2\rho_0}{n^2}.$$

**Описание установки.** Струна  $A$  (рис. 13.4) расположена вертикально в специальной установке. Внешнее периодическое воздействие на струну осуществляется в верхней точке, где конец струны прикреплен к железной пластине  $B$ . Конец этой пластинки находится между полюсами электромагнита  $C$ , питаемого переменным током частотой 50 Гц.

Сама пластинка является частью магнитной цепи электромагнита  $D$ , питаемого постоянным током, изменение которого позволяет изменять амплитуду колебаний пластинки, а, следовательно, и струны.

Нижний конец струны прикреплен к концу рычага  $E$  с осью вращения в точке  $O$ . Ниже подвешена платформа  $M$  и ведро  $N$ , на другом конце рычага  $E$  может перемещаться и закрепляться груз  $k$ . Вес платформы и ведра может быть уравновешен этим грузом.

Натяжение струны определяется весом груза на платформе и весом песка в ведре. Пользование песком позволяет незначительно изменять величину натяжения; вес песка определяется на весах.

Для наблюдения формы колебаний струны применяется стробоскопическое освещение. Для этого за матовым стеклом  $S$  в коробе  $T$  помещена лампа дневного света, включаемая в цепь переменного тока (50 Гц, 220 В). Струна, совершающая 50 полных колебаний в секунду и освещаемая лампой, дающей 100 вспышек в секунду, кажется неподвижной в своих двух крайних положениях.

**Измерения.** Уравновешивают рычаг  $E$ , включают цепи освещающей лампы и электромагнитов. На платформу постепенно накладывают гири, в ведро насыпают песок, добиваясь того, чтобы струна давала устойчивую картину основного тона. Пользуясь шкалами  $Q$ , измеряют амплитуду колебаний в различных точках (не менее 10) струны. По полученным данным строят график зависимости амплитуды колебаний от координаты точки струны. Полученную кривую необходимо сравнить с теоретической синусоидой, амплитуда которой равна амплитуде экспериментальной кривой. На этом же листе бумаги строят такую синусоиду.

Совершенно так же поступают для двух следующих обертонов струны. По формулам (5, 6) при  $n=1$ , зная  $\nu$  (50 Гц),  $T_0$  и  $L$ , определяют величину плотности струны  $\rho$  (длину струны  $L$  измеряют масштабной линейкой).



*Литература:* [3] — гл. XVIII, § 149, 150; [4] — гл. XV, § 138—143.

## *Лабораторная работа 27*

### **Определение скорости звука и модуля Юнга в твердых телах**

**Принадлежности:** 1) прибор (с держателем стержня, возбудителем и приемником), 2) исследуемые стержни, 3) осциллограф, 4) звуковой генератор.

Цель работы — определение скорости звука и модуля Юнга путем измерения резонансных частот продольных звуковых колебаний в стержнях, изготовленных из слабопоглощающих звук материалов (металлы).

При распространении звука в изотропных твердых телах наблюдаются как продольные, так и поперечные волны, причем скорость их распространения различна и зависит от упругих свойств тел, через которые проходит волна. Теоретический анализ этого процесса приведен во введении к гл. 13. В случае продольных волн теория дает следующее соотношение для скорости звука в стержне, длина которого велика по сравнению с линейными размерами его сечения (см. (13.7)):

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1)$$

где  $u$  — скорость распространения продольной звуковой волны,  $E$  — модуль Юнга материала, из которого сделан стержень,  $\rho$  — его плотность.

Для возбуждения продольных колебаний в стержне достаточно каким-либо образом вызвать в одном из его концов попеременное сжатие и растяжение в направлении длины. Благодаря очень малому затуханию упругой волны в стержне и ее почти полному отражению на границе раздела стержень — воздух при определенных частотах колебаний устанавливаются стоячие волны. В нашем случае стержень закреплен посередине, и при таком возбуждении узел стоячей волны приходится на место зажима, а пучности — на концах стержня. В этом случае стержень длиной  $L$  можно рассматривать как соединенные в месте зажима два стержня длиной  $l = L/2$ , закрепленных с одного края и свободных с другого. Этот случай рассмотрен во введении. Условие образования стоячей волны для такого стержня будет (см. (13.20) и (13.20<sup>a</sup>))

$$L = 2l = (2n + 1) \lambda / 2 \quad (2)$$

или

$$\nu_n = \frac{(2n + 1)}{2L} u, \quad (3)$$

где  $\nu_n$  — резонансные частоты,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $u$  — фазовая скорость.

Определив экспериментально резонансные частоты  $\nu_n$  (3), определяют фазовую скорость  $u$  и затем, зная плотность материала стержня  $\rho$ , модуль Юнга (1).

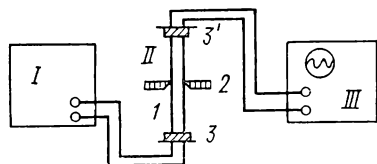


Рис. 13.5

**Описание установки.** Схема установки представлена на рис. 13.5. Установка состоит из звукового генератора I, прибора II с держателем стержня и двумя электромагнитами для возбуждения и приема продольных колебаний и катодного осциллографа III. Исследуемый стержень 1 закрепляется зажимом 2 на своей середине так, чтобы его нижний и верхний концы были расположены против полюсов возбuditеля 3 и приемника 3'. Стержень должен быть закреплен строго в середине (с точностью до одного миллиметра), неточное закрепление влияет на результаты измерений. Для усиления возбуждения продольных колебаний возбуждатель и приемник необходимо расположить более близко у концов стержня, что достигается при помощи микровинтов, жестко связанных с электромагнитами. Переменное электрическое напряжение от генератора подводится к катушке возбуждения. В результате на нижний конец стержня будет действовать периодическая сила с частотой, равной частоте генератора, и в ферромагнитном стержне возбуждятся продольные волны. Если стержень сделан из немагнитного материала, то для возбуждения продольных волн к его концам приклеивают тонкие пластинки из мягкого железа.

Верхний электромагнит — приемник 3' — является преобразователем звуковых колебаний в электрические. Его катушка присоединяется к клеммам «вход вертикального усилителя» катодного осциллографа. Усиленные электрические колебания, поступающие от приемника, наблюдаются на экране осциллографа. Постепенно изменяя частоту колебаний напряжения, подаваемого на возбуждатель от генератора, можно добиться резонанса, т. е. совпадения частоты указанных колебаний с одной из частот собственных колебаний стержня.

Возрастание амплитуды на экране осциллографа может произойти в результате резонанса поперечных колебаний исследуемого стержня (отдельные сечения стержня смещаются перпендикулярно его оси). Этот эффект выражен тем сильнее, чем дальше отстоят свободные концы стержня от возбуждателя и приемника и относительно них нарушена центровка стержня.

Катушки электромагнитов должны иметь постоянные магниты, при этом напряженность магнитного поля магнитов должна быть

не меньше (лучше, если больше), чем напряженность магнитного поля катушек электромагнитов в результате прохождения переменного тока. Только в этом случае частота возбуждающей силы будет равна частоте звукового генератора. Если в катушке электромагнита постоянный магнит заменен сердечником из мягкого железа, то электромагнит будет притягивать стержень с удвоенной частотой (два раза за период переменного тока независимо от его направления) и частота возбуждающей силы будет в два раза больше.

**Измерения.** Собирают установку по схеме на рис. 13.5. Пользуясь микровинтами, приближают возбудитель 3 и приемник 3' к соответствующим концам стержня до воздушного зазора, равного 0,1—0,2 мм. Напряжение на выходе звукового генератора устанавливается на максимум. Наблюдая за экраном катодного осциллографа, медленно вращают лимб «установка частоты» звукового генератора до тех пор, пока не наступит возрастание амплитуды колебаний на экране. Соответствующую частоту колебаний отсчитывают по лимбу генератора. Для металлических стержней, длина которых 300—500 мм, основная резонансная частота равна нескольким килогерцам, настройку нужно начинать с 3000 Гц. Особенно сильное возрастание амплитуды колебаний наблюдается на основном резонансе.

Повышая частоту звукового генератора, находят другие возможные резонансные частоты материала стержня.

Пользуясь формулами (1) и (3), определяют скорость распространения продольных волн и модуль Юнга стержня.

Указанные измерения проводят со стержнями различной длины, изготовленными из стали, латуни, железа и алюминия.

Для одного из стержней снимают резонансную кривую, измеряя изменение амплитуды колебаний на экране осциллографа. По полученным данным строят резонансную кривую.

*Литература:* [3] — гл. XVIII, § 149, 150; [4] — гл. XV, § 138—143.

## ТЕОРЕМЫ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОЖИДАНИИ И ДИСПЕРСИИ

### І. ТЕОРЕМЫ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОЖИДАНИИ

1) Если  $a$  — константа, то

$$M(a) = a.$$

Доказательство очевидно из определения математического ожидания (19.1) и условия нормировки (18.2).

2) Если  $a$  и  $b$  — константы, а  $x_1$  и  $x_2$  — две случайные величины, то

$$M(ax_1 + bx_2) = aM(x_1) + bM(x_2).$$

Доказательство следует из равенства интеграла от суммы сумме интегралов:

$$\begin{aligned} M(ax_1 + bx_2) &= \iint (ax_1 + bx_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= a \iint x_1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + b \iint x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = aM(x_1) + bM(x_2). \end{aligned}$$

3) Для независимых случайных величин  $x_1$  и  $x_2$ :

$$M(x_1 \cdot x_2) = M(x_1) \cdot M(x_2).$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} M(x_1 x_2) &= \iint x_1 x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int x_1 f_1(x_1) dx_1 \int x_2 f_2(x_2) dx_2 = M(x_1) M(x_2). \end{aligned}$$

### ІІ. ТЕОРЕМЫ О ДИСПЕРСИИ

1) Если  $a$  — константа, то

$$D(a) = 0.$$

Это свойство следует из определения дисперсии (19.4) и свойства (1) для математических ожиданий.

2) Если  $a$  и  $b$  — константы, а  $x_1$  и  $x_2$  — две независимые случайные величины, то

$$D(ax_1 + bx_2) = a^2 D(x_1) + b^2 D(x_2).$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} D(ax_1 + bx_2) &= \iint (ax_1 + bx_2 - M(ax_1 + bx_2))^2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= a^2 \int (x_1 - M(x_1))^2 f_1(x_1) dx_1 \int f_2(x_2) dx_2 + \\ &+ b^2 \int (x_2 - M(x_2))^2 f_2(x_2) dx_2 \int f_1(x_1) dx_1 = a^2 D(x_1) + b^2 D(x_2). \end{aligned}$$

# ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица I

Коэффициенты  $\lambda_\alpha$  для нормального распределения

$\alpha$	0,5	0,68	0,75	0,80	0,90	0,95	0,99	0,997
$\lambda_\alpha$	0,7	1,0	1,15	1,3	1,7	2,0	2,6	3

Таблица II

Коэффициенты Стьюдента  $t_\alpha$ ,  $n - 1$

$\alpha \backslash n-1$	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
1	1,00	2,0	3,1	6,3	12,7	63,7
2	0,82	1,3	1,9	2,9	4,3	9,9
3	0,77	1,3	1,6	2,4	3,2	5,8
4	0,74	1,2	1,5	2,1	2,8	4,6
5	0,73	1,2	1,5	2,0	2,6	4,0
6	0,72	1,1	1,4	1,9	2,4	3,7
7	0,71	1,1	1,4	1,9	2,4	3,5
8	0,71	1,1	1,4	1,9	2,3	3,4
9	0,70	1,1	1,4	1,8	2,3	3,3
10	0,70	1,1	1,4	1,8	2,2	3,2
50	0,68	1,1	1,3	1,7	2,0	2,7
100	0,68	1,0	1,3	1,7	2,0	2,6
	0,67	1,0	1,3	1,6	2,0	2,6

Таблица III

Коэффициенты  $\gamma_\alpha$  для неравенства Чебышева

$\alpha$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$\gamma_\alpha$	1,4	1,6	1,8	2,2	3,2	4,4

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .	3
<b>Часть I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА И ОФОРМЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА (В ЛАБОРАТОРИЯХ ОБЩЕГО ФИЗИЧЕСКОГО ПРАКТИКУМА). КРАТКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>6</b>
<i>Глава 1. Элементарная классификация измерений</i>	9
§ 1. Основные цели физического практикума	9
§ 2. Элементарные сведения об измерениях	9
§ 3. Виды измерений	10
<i>Глава 2. Погрешность измерений</i>	14
§ 4. Виды погрешности	14
§ 5. Составляющие погрешности измерений	16
§ 6. Элементарные методы учета погрешностей	17
<i>Глава 3. Математическая обработка результатов эксперимента</i>	21
§ 7. Прямые измерения	21
§ 8. Косвенные измерения	24
§ 9. Совместные измерения. Понятие о методе наименьших квадратов (МНК)	29
<i>Глава 4. Требования, предъявляемые к оформлению лабораторных работ</i>	34
§ 10. Оформление вводной части	34
§ 11. Запись результатов измерений	35
§ 12. Форма представления результатов эксперимента. Выводы	36
§ 13. Построение графиков	38
§ 14. Вычисления с приближенными числами	40
§ 15. Сводка правил по математической обработке результатов эксперимента	41
I. Прямые измерения	41
II. Косвенные измерения	43
III. Совместные измерения. Метод наименьших квадратов (МНК)	44
<i>Глава 5. Некоторые элементарные понятия и определения теории вероятностей</i>	46
§ 16. Понятие о случайной величине	46
§ 17. Статистическая устойчивость. Вероятность. Достоверные и недостоверные события. Сложение и умножение вероятностей	47
§ 18. Понятие о функции плотности и функции распределения. Гистограмма	48
§ 19. Понятие о математическом ожидании, медиане и о дисперсии	51
§ 20. Примеры функций плотности	53
§ 21. Неравенство Чебышева	55
§ 22. Независимые случайные величины. Функции случайных величин. Свертка распределений	55
§ 23. Распределение Стьюдента	56
<i>Глава 6. Некоторые элементарные понятия и определения математической статистики</i>	58
§ 24. Понятие о выборке	58
§ 25. Выборочные значения	59
§ 26. Доверительные интервалы. Критерий значимости. Коэффициент доверия (надежности)	61
§ 27. Построение доверительных интервалов	62
<i>Глава 7. Вопросы анализа и интерпретации результатов измерений</i>	67
§ 28. Постановка задачи	67
§ 29. Общие понятия метода редукции измерений	70
§ 30. Понятие надежности модели	76

<b>Часть II. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО МЕХАНИКЕ</b>	82
<b>Глава 8. Динамика абсолютно твердого тела</b>	83
Лабораторная работа 1. Изучение законов равноускоренного движения на машине Атвуда	87
Лабораторная работа 2. Изучение колебаний физического маятника	91
Лабораторная работа 3. Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника (метод Бесселя)	94
Лабораторная работа 4. Изучение вращательного движения твердого тела	97
Лабораторная работа 5. Определение момента инерции и проверка теоремы Гюйгенса — Штейнера методом крутильных колебаний	101
Лабораторная работа 6. Измерение момента инерции колеса	104
Лабораторная работа 7. Изучение эллипсоида инерции твердых тел	108
Лабораторная работа 8. Изучение прецессии гироскопа	113
<b>Глава 9. Законы сохранения в механике</b>	116
Лабораторная работа 9. Измерение скорости полета пули с помощью баллистического маятника	121
Лабораторная работа 10. Крутильный баллистический маятник	125
Лабораторная работа 11. Изучение движения маятника Максвелла	131
Лабораторная работа 12. Измерение реактивной силы	146
Лабораторная работа 13. Проверка закона сохранения момента количества движения	149
<b>Глава 10. Силы трения</b>	157
Лабораторная работа 14. Определение коэффициентов трения скольжения	159
Лабораторная работа 15. Определение коэффициентов трения качения	163
Лабораторная работа 16. Собственные линейные и нелинейные колебания, измерение коэффициентов трения	167
<b>Глава 11. Упругие деформации</b>	180
Лабораторная работа 17. Определение модуля упругости из растяжения и изгиба	195
Лабораторная работа 18. Определение модуля сдвига из кручения	199
Лабораторная работа 19. Определение коэффициента Пуассона и частоты биений	203
Лабораторная работа 20. Определение времени соударения шаров и модуля Юнга	208
<b>Глава 12. Механические колебания</b>	215
Лабораторная работа 21. Собственные колебания пружинного маятника	226
Лабораторная работа 22. Вынужденные колебания пружинного маятника и явление резонанса	233
Лабораторная работа 23. Изучение колебаний связанных маятников	236
Лабораторная работа 24. Вынужденные колебания маятника с движущейся точкой подвеса	243
Лабораторная работа 25. Вынужденные колебания в системе с двумя степенями свободы	248
<b>Глава 13. Упругие волны</b>	255
Лабораторная работа 26. Исследование поперечных колебаний струны	261
Лабораторная работа 27. Определение скорости звука и модуля Юнга в твердых телах	264
<b>Приложения</b>	267

## **ОБЩИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ. МЕХАНИКА**

Зав. редакцией *Н. М. Глазкова*

Редакторы *М. С. Аксентьева, И. В. Новикова*

Художественный редактор *Ю. М. Добрянская*

Технический редактор *Н. И. Смирнова*

Корректоры *Т. И. Алейникова, Н. И. Коновалова*



ИБ № 3678

Сдано в набор 11.04.91	Подписано в печать 26.11.91
Формат 60×90/16	Бумага тип. № 1
Гарнитура литературная.	Высокая печать
Усл. печ. л. 17,0	Уч.-изд. л. 16,45
Тираж 7670 экз.	Заказ 74. Изд. № 1719
Цена 4 р. 40 к.	

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета.  
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.  
119899, Москва, Ленинские горы

